A816. Avec modération.... ****

A8. Jouez avec une calculette

Problème proposé par Jean Moreau de Saint Martin

On considère la suite xn définie par:

$$x_{n+1} = 2024 - \frac{12119}{x_n} + \frac{22204}{x_n x_{n-1}} - \frac{12108}{x_n x_{n-1} x_{n-2}} \text{ avec } x_0 = \frac{8358}{8051},\ x_1 = \frac{1506}{1393} \text{ et } x_2 = \frac{294}{251}$$

Q1 Calculer les valeurs exactes de x3, x4 et x5.
Q2 Quand n tend vers l'infini calculer la limite de la suite xn .
Nota: Le recours à un automate n'est pas interdit, mais avec modération pour ne pas se laisser griser

PROPOSITION Th Eveilleau

Q1

$2024 = 2^3 * 11 * 23$
12119 = 12119
$22204 = 2^2 * 7 * 13 * 61$
$12108 = 2^2 * 3 * 1009$

x_0 = 8358/8051

x_1 = 9036/8358

x_2 = 10584/9036

x_3 = 14256/10584 = 66/49

x_4 = 23328/14256 = 18/11

x_5 = 46656/23328 = 2

Q2

Nous allons montrer que la limite de x_n est 3 et non pas 2018 comme le laissent paraître les calculs sur machine.

Voir les calculs en fin de document. Ces calculs mécaniques sont OK jusqu'à 36.
Ensuite ils ne sont plus corrects sur machine.

On constate aisément par le calcul que logiquement, le dénominateur de x_{n+1} est le numérateur de x_n ,
aussi nous poserons dans la suite : $x_n = y_{n+1}/y_n$,

Démonstration et calcul effectif de la limite.

1°)

$x_{n+1} = 2024 - 12119/x_n + 22204/x_n x_{n-1} - 12108/x_n x_{n-1} x_{n-2}$;

Cela s'écrit :

$x_{n+1}\, x_n\, x_{n-1} = 2024\, x_n\, x_{n-1} - 12119\, x_{n-1} + 2220 - 12108/ x_{n-2}$
$= 2018\, x_n\, x_{n-1} + 6\, x_n\, x_{n-1} - 2018 * 6\, x_{n-1} - 11\, x_{n-1} + 2018 *11 + 6 - 2018*6/ x_{n-2}$

Nous pouvons donc écrire la relation de récurrence :

$\boldsymbol{x_{n+1}\, x_n\, x_{n-1} - 6\, x_n\, x_{n-1} + 11\, x_{n-1} - 6 = (2018/ x_{n-2}) * (x_n\, x_{n-1}\, x_{n-2} - 6\, x_{n-1}\, x_{n-2} + 11\, x_{n-2} - 6)}$
$= (2018/ x_{n-2}) * 2018/ x_{n-3}\ (x_{n-1}\, x_{n-2}\, x_{n-3} - 6\, x_{n-2}\, x_{n-3} + 11\, x_{n-3} - 6)$
.

$= (2018/ x_{n-2}) *.. * (2018/ x_0) * (x_2\, x_1\, x_0 - 6\, x_1\, x_0 + 11\, x_0 - 6)$
$= 2018^{n-1}/(x_{n-2} *..* x_0) * (x_2\, x_1\, x_0 - 6\, x_1\, x_0 + 11\, x_0 - 6)$
$= 0$

Nous avons donc :

$x_{n+1}\, x_n\, x_{n-1}$ - $6\, x_n\, x_{n-1}$ + $11\, x_{n-1}$ - $6 = 0$ qui donne $x_{n+1} = 6 - 11 / x_n + 6 / x_n\, x_{n-1}$ (*)

Qui à la limite s'écrit $(L-1)(L-2)(L-3) = 0$

Afin de déterminer la bonne limite, continuons :

La limite est donc soit 1, soit 2, soit 3.

Poursuivons donc… pour déterminer la bonne limite.

2°)

Reprenons *(*)*, nous avons :

$x_{n+1}\, x_n = 6\, x_n - 11 + 6/ x_{n-1}$ SOIT

$x_{n+1}\, x_n = 3*2\; x_n - (3*3+2) + 3*2/ x_{n-1}$

Et nous obtenons avec une petite transformation, la relation de récurrence :

$$\mathbf{x_{n+1}\, x_n - 3\, x_n + 2 = (3 / x_{n-1}) * (x_n\, x_{n-1} - 3\, x_{n-1} + 2)}$$

Itérons sur n,

$x_{n+1}\, x_n - 3\, x_n + 2 = (3/ x_{n-1}) * 3/ x_{n-2} * (x_{n-1}\, x_{n-2} - 3\, x_{n-2} + 2)$

$x_{n+1}\, x_n - 3\, x_n + 2 = (3/ x_{n-1}) * 3/ x_{n-2} * 3/ x_{n-3} * (x_{n-2}\, x_{n-3} - 3\, x_{n-3} + 2)$

…

$x_{n+1}\, x_n - 3\, x_n + 2 = (3/ x_{n-1}) *.. * (3/ x_0) * (x_1\, x_0 - 3\, x_0 + 2)$

Cette dernière relation s'écrit :

$x_{n+1}\, x_n - 3\, x_n + 2 = 3^n/(x_{n-1} *..* x_0) * (x_1\, x_0 - 3\, x_0 + 2)$

$x_{n+1}\, x_n - 3\, x_n + 2 = 3^n/(x_{n-1} *..* x_0) * [9036/8358) * (8358/8051) – 3*8358/8051 + 2]$

$x_{n+1}\, x_n - 3\, x_n + 2 = [3^n/(x_{n-1} *..* x_0)] * 64/8051$

Avec $x_n = y_{n+1}/y_n$, nous avons le produit de tous les xi de 0 à n-1 : $y_n/y_0 = y_n / 8051$

$x_{n+1}\, x_n - 3\, x_n + 2 = [3^n*8051/ y_n] * 64/8051 = 64* 3^n/ y_n$

Nous obtenons une nouvelle relation de récurrence :

$$\mathbf{x_{n+1}\, x_n - 3\, x_n + 2 = 64* 3^n/ y_n}$$

Ceci donne en remplaçant x_n par y_{n+1}/y_n :

$y_{n+2} - 3\, y_{n+1} + 2\, y_n = 64*3^n$ OU

$y_{n+2} - 2\, y_{n+1} = 64*3^n + [y_{n+1} - 2\, y_n]$ PUIS

$y_{n+2} - 2\, y_{n+1} = 64*3^n + 64*3^{n-1} + [y_n - 2\, y_{n-1}]$

.

$y_{n+2} - 2\, y_{n+1} = 64\, (3^n + 3^{n-1} +… +1) + [y_1 - 2\, y_0]$ SOIT

$y_{n+2} - 2\, y_{n+1} = 64 * (3^{n+1} -1)/2 - 7744$ OU

$\mathbf{y_{n+2} = 2\, y_{n+1} + 32 *3^{n+1} - 32 - 7744}$ SOIT

$\mathbf{y_{n+2} = 2\, y_{n+1} + 32 *3^{n+1} - 7776}$

$\mathbf{y_{n+2} = 2\, y_{n+1} + 2^5 * 3^{n+1} - 7776}$ on itère une nouvelle fois sur n,

$2\, y_{n+1} = 2^2\, y_n + 2^6*3^n - 2*7776$

$2^2\, y_n = 2^3 y_{n-1} + 2^7*3^{n-1} - 2^2 * 7776$

$2^3\, y_{n-1} = 2^4 y_{n-2} + 2^8*3^{n-2} - 2^3 * 7776$

$2^4 y_{n-2} = 2^5 y_{n-3} + 2^9*3^{n-3} - 2^4 * 7776$

.

$2^{n-1}\, y_3 = \; 2^n y_2 \; + \; 2^{n+4} * 3^2 - \; 2^{n-1} * 7776$

$2^n\, y_2 = \; 2^{n+1} y_1 \; + \; 2^{n+5} * 3^1 - \; 2^n * 7776$

En additionnant membre à membre on obtient :

$y_{n+2} = \; 2^{n+1} y_1 \; + (2^5 * 3^{n+1} \; + \; 2^6 * 3^n + 2^7 * 3^{n-1} \; + \; 2^8 * 3^{n-2} + \ldots \; + \; 2^{n+5} * 3) - \; 7776 * (1+2+2^2+\ldots +2^n)$

$y_{n+2} = \; 2^{n+1} y_1 \; + 2^{n+6} (\sum_1^{n+1} \frac{3^k}{2^k}) - \; 7776 * (1+2+2^2+\ldots +2^n)$

$y_{n+2} = \; 2^{n+1} y_1 \; + \; 2^{n+6} \; * \; (3/2) \; * [(3/2)^{n+1} -1] / (1/2) \; - \; 7776 * (2^{n+1} -1)$

$y_{n+2} = \; 2^{n+1} y_1 \; + \; 2^{n+6} \; * \; 3 \; * [(3/2)^{n+1} -1] \; - \; 7776 * (2^{n+1} -1)$

$y_{n+2} = \; 2^{n+1} y_1 \; - \; 7776 * 2^{n+1} \; + \; 2^{n+6} \; * \; 3^{\,n+2} / \, 2^{n+1} \; - \; 2^{n+6} \; * \; 3 \; + \; 7776$

$y_{n+2} = \; 2^{n+1} \, (8358 - \; 7776) \; + \; 2^5 \; * \; 3^{\,n+2} \; - \; 2^{n+6} \; * \; 3 \; + \; 7776$

$y_{n+2} = \; 2^{n+1} \, (582 - 96 \;) \; + \; 2^5 \; * \; 3^{\,n+2} \; + \; 7776$

$y_{n+2} = \; 2^{n+2} \, (243 \;) \; + \; 2^5 \; * \; 3^{\,n+2} \; + \; 7776$

ET finalement :

$y_n = 243 * 2^n + \; 32 \; * 3^{\,n} \; + 7776$

revenons à la suite $x_n = y_{n+1} / y_n$, :

$$x_n = \frac{243 * 2^{n+1} + 32 * 3^{n+1} + 7776}{243 * 2^n + 32 * 3^n + 7776}$$

Quand n tend vers l'infini, cette suite x_n tend vers le rapport des termes de plus fort exposant en n : $\frac{32 * 3^{n+1}}{32 * 3^n} = 3$

La limite de la suite x_n est 3 et non pas 2018.

CALCULS :

x6= 7/3 = 108864/46656 ; x_5 = 46656/23328 ; x4 = 23328/14256

x7= 2*3²/ 7 = 279936 /108864

x8= 49/18 = 762 048/279 936;

x9 = 138/49 = 2 146 176/762048

x10 = 397/138 = 6 174 144/2 146 176

x11 = 1158/397 = 18 009 216/6 174 144

x12 = 3409/1158 = 53 016 768/18 009 216

x13 = 10098/3409 = 157 044 096/53 016 768

x14 = 30037/10098 ; x13= 10098/3409 ; x12= 3409/1158

x15= 89598/30037 ; x14= 30037/10098 ; x13= 10098/3409

x16= 267769/89598 ; x15= 89598/30037; x14= 30037/10098

x17= 801258 /267769 ; x16= 267769/89598 ; x15= 89598/30037

x18 = 2 399 677 / 801258 ; x17= 801258 /267769 ; x16= 267769/89598 ~ 2.9923….

x19 = 7 190 838 / 2 399 677 ; x18 = 2 399 677 / 801258 ; x17= 801258 /267769 ~ 2.9923….

.

x34 = 102 946 098 837 828/34 315 457 115 876 ~ 2.99999…

x35 = 308 829 537 618 392/102 946 098 837 828 ~ 2.99999…

x36 = 909 895 494 320 224 / 308 829 537 618 392 ~ 2.99999…

Ensuite il y a problème car nous obtenons un faux nombre négatif dû au cumul des erreurs dans la partie décimale ou bien à l'incapacité de la machine de calculer avec de très grands nombres.

Lorsque le nombre est trop grand , l'écriture mécanique sur la machine est mise en négatif….

Mécaniquement les résultats sont FAUX.

Si l'on n'y prend garde, le calcul sur machine, mène vers 2018 qui est un gros piège surtout en 2018 !