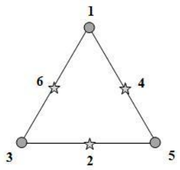
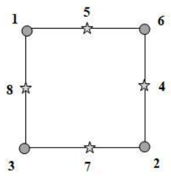
B134. Les roues magiques ****

Problème proposé par Michel Lafond

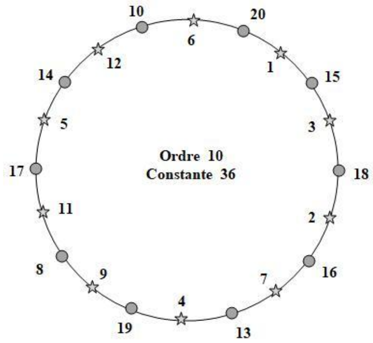
Je définis une roue magique d'ordre ≥ 3 comme un ensemble de 2n points, composé des n sommets et des n milieux des côtés d'un polygone régulier convexe à n sommets.
À chaque point de cet ensemble est associé un entier compris entre 1 et 2n (appelé sa marque) de telle sorte que chaque marque ne soit utilisée qu'une fois, et que la somme des trois marques situées sur un même côté soit constante.
Exemples :



Constante 10



Constante 12



Démontrer qu'il existe des roues magiques de tout ordre n ≥ 3

PROPOSITION Thérèse Eveilleau

Soit s la somme des n nombres positionnés aux sommets de chaque roue.
Soit c la somme des nombres positionnés sur chaque côté : sommets compris.
Soit S_n la somme de tous les nombres de 1 à $2n$ positionnés sur la roue entière.
Nous avons $S_n = 2n(2n+1)/2$ soit $S_n = n(2n+1)$
$S_n + s = n*c$ soit
$2n(2n+1)/2 + s = n*c$
D'où
$s = n*c - n(2n+1)$
$s = n [c - 2n - 1]$
Il faut donc que la somme des nombres en chacun des sommets soit un multiple du nombre de sommets de la roue.
La somme constante sur chacun des côtés est alors :
$\boldsymbol{c = (S_n + s) / n}$
$\boldsymbol{c = 2n + 1 + s / n}$
$\boldsymbol{c = 2n + 1 + k}$ avec $\boldsymbol{s=k*n}$

c est le premier nombre à fixer pour trouver une solution.
Une fois s fixé, on détermine les nombres sur les côtés par simple soustraction.

Par exemple pour n=3,
$\boldsymbol{S_n = 6*7/2 = 21.}$

.Si on choisit $s = 9$ avec les nombres 1, 3 et 5 comme ci-dessus, alors
p=3 donc ***q=4*** et ***s=3*3=9 ;*** la somme des nombres aux milieux est ***12=3*4.***

MAIS

.Si on choisit ***s = 9*** avec les nombres 2, 3 et 4, alors ***c = (21 + 9) /3 = (21 + 9) / 3 = 10*** ;

Cela ne marche pas, car on ne doit pas avoir de répétition dans l'utilisation des chiffres autour de la roue.

La clé résidera dans le bon choix des nombres aux sommets de chaque roue.

→

.Somme des sommets = multiple du nombre de côtés et

.Positionner les sommets de façon que à ce que la différence entre la constante du côté et les deux sommets de ce côté ne soit pas dans la liste des nombres déjà choisis aux sommets.

On remarque que dans les décompositions en somme de trois nombres sur chaque côté, nous devons retrouver

- les nombres aux sommets DEUX fois et

- les nombres des milieux une SEULE fois.

A partir de là le problème est toujours possible.

Je suggère une procédure possible ci-dessous.

Il y a toujours au moins une possibilité de choisir correctement ces nombres

Nous allons voir ci-dessus comment procéder.

Il s'agit en quelque sorte d'un petit puzzle à bien ajuster.

Pour la somme des sommets ***s***, choisissons d'emblée les premiers entiers possibles ayant une somme ***S*** multiple de ***n***.

-Avec n impair

.n = 3

On peut choisir les trois premiers nombres pour ***s***.

$s = 1 + 2 + 3 = 6$ Alors

$S_3 = 3(2*3+1) = 21$ ET $3c = 21 + 6 = 37$

Donc $\boldsymbol{c = 9}$

Il suffit maintenant de choisir les décompositions de ***c*** en somme de trois nombres pour chacun des deux côtés. MAIS chaque nombre pris au sommet doit être choisi **exactement deux** fois (pour deux côtés) et ceux du milieu **exactement** une fois.

Dans les exemples, j'indique d'abord le nombre du milieu puis les nombres des deux sommets entourant ce milieu.

$c = 9$

$= 4 + (2 + 3)$

$= 5 + (3 + 1)$

$= 6 + (1 + 2)$

Chaque nombre 1 ; 2 ; 3 correspondant à un sommet

est bien choisi deux fois et les autres une seule fois → C'est **OK**

.$n = 5$

On peut choisir $s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

Alors

$S_5 = 5(2*5 + 1) = 55$ ET $3c = 55 + 15 = 70$

Donc $c = 70/5 = \mathbf{14}$

voici les décompositions possibles :

$c = 14$
$= 6 + (3 + 5)$
$= 7 + (5 + 2)$
$= 8 + (2 + 4)$
$= 9 + (4 + 1)$
$= 10 + (1 + 3)$

Chaque nombre 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 correspondant à un sommet est choisi exactement deux fois et les autres **6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10** sont choisis une seule fois → C'est **OK**

.$n = 7$

$s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ et $c = 19$

On prendra:

$c = 8 + (4 + 7)$
$= 9 + (7 + 3)$
$= 10 + (3 + 6)$
$= 11 + (6 + 2)$
$= 12 + (2 + 5)$
$= 13 + (5 + 1)$
$= 14 + (1 + 4)$

On peut ***généraliser*** cette procédure qui d'ailleurs n'est pas unique, aux roues ***d'ordre impair*** : en effet la somme des n premiers entiers avec n impair, est un multiple de n car $n+1$ devient pair et $(n+1)/2$ est un entier **p**, donc $s = p*n$ est bien un multiple de n.

On aura $s = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2$ et $c = 2n + 1 + s/n = 2n + 1 + (n+1)/2 = (5/2)n + 3/2$ (*)

Donc $c = (5/2)n + 3/2$

Prendre ainsi

$c = (n+1) + ((c - 2n - 1) + n)$
$= (n+2) + (n + (c - 2n - 2))$
$= (n+3) + ((c - 2n - 2) + n - 1)$
$= (n+4) + (n - 1 + (c - 2n - 3))$
$= (n+5) + ((c - 2n - 3) + n - 2)$

.

$= 2n - 1 + (n - (n-3)/2 + 1)$
$= 2n + (1 + n - (n-1)/2)$

Les termes en rouge sont égaux à $n/2 + 1/2$ grâce à la relation (*), et on a bien au moins une solution.

-Avec n pair

.n = 4

Cette fois la somme des n premiers entiers n'est pas un multiple de n.

Nous allons légèrement modifier le choix des nombres aux sommets de la roue.

Je vais prendre deux exemples et comme ci-dessus, il suffira de généraliser la procédure pour obtenir une solution.

$s = 1 + 2 + 3 + \mathbf{6} = 12$

On prend les (n-1) premiers entiers consécutifs puis le premier qui va donner une somme ***s*** multiple de n. Ici, c'est 6.

Alors

$S_4 = 8(8+1)/2 = 36$

$4\,c = 36 + 12 = 48$ ET $c = 12$

Nous avons

$\mathbf{c = 4 + (6 + 2)}$

$\mathbf{c = 7 + (2 + 3)}$

$\mathbf{c = 8 + (3 + 1)}$

$\mathbf{c = 5 + (1 + 6)}$

Chaque nombre 1 ; 2 ; 3 ; 6 correspondant à un sommet est choisi exactement deux fois et les autres 5 ; 4 **; 7 ; 8** sont choisis une seule fois → C'est **OK**

.n = 6 $S_6 = \mathbf{78}$

$s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \mathbf{9} = \mathbf{24}$ Alors $\mathbf{c = 17}$

On prendra :

$\mathbf{17 = 6 + (2 + 9)}$

$\mathbf{= 7 + (9 + 1)}$

$\mathbf{= 11 + (1 + 5)}$

$\mathbf{= 8 + (5 + 4)}$

$\mathbf{= 10 + (4 + 3)}$

$\mathbf{= 12 + (3 + 2)}$

.n = 8 $S_8 = \mathbf{136}$ ***ET*** $s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \mathbf{12} = \mathbf{40}$ Alors $c = 2n + 1 + c/n = 22$

On prendra d'abord les extrêmes et on va de proche en proche :

$22 = 8 + (2 + 12)$

$= 9 + (12 + 1)$

$= 14 + (1 + 7)$

$= 10 + (7 + 5)$

$= 11 + (5 + 6)$

$= 13 + (6 + 3)$

$= 15 + (3 + 4)$

$= 16 + (4 + 2)$

MAIS cela ne marche que pour les n multiples de 4.

Pour les cas n = 4k+2, le cycle s'arrête à n-1, cela ne marche pas →

Une idée : modifier les sommets choisis à partir des deux derniers et non pas du seul dernier comme pour les multiples de 4.

DONC

-remplacer l'avant dernier sommet par *n+1* ;

-le dernier sommet par le *premier entier* non utilisé permettant d'obtenir un *multiple de n* pour la somme des sommets.

On obtiendra ainsi le bon nombre de cycles pour boucler le polygone.

Exemple

$.n = 10$ $\quad S_{10} = 210$ **ET** $\quad s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \mathbf{11} + \mathbf{13} = \mathbf{60}$

Alors $\quad c = 2n + 1 + c/n = 27$

On obtient :

$27 = 15 + (7 + 5)$

$= 9 + (5 + 13)$

$= 10 + (13 + 4)$

$= 12 + (4 + 11)$

$= 14 + (11 + 2)$

$= 17 + (2 + 8)$

$= 16 + (8 + 3)$

$= 18 + (3 + 6)$

$= 20 + (6 + 1)$

$= 19 + (1 + 7)$

Le processus marche jusqu'à 26…

Pour la suite, j'ai procédé de 2 en 2 et ajusté :

Pour n=26

avec une somme aux sommets de 364, une constante de 67 →

Sommets :

1,14,2,15,3,16,4,17,5,18,6,19,7,20,8,21,9,22,10,27,12,29,13,23,11,32

Milieux :

52,51,50,49,48,47,46,45,44,43,42,41,40,39,38,37,36,35,30,28,26,25,31,33,24,34

Pour n=30

avec une somme aux sommets de 480, une constante de 77 →

Sommets :

1,16,2,17,3,18,4,19,5,20,6,21,7,22,8,23,9,24,10,25,11,27,15,32,12,34,14,26,13,36

Milieux :

60,59,58,57,56,55,54,53,52,51,50,49,48,47,46,45,44,43,42,41,39,35,30,33,31,29,37,38,28,40

Ce sont les procédures utilisées dans l'animation :

http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/B134.html

Pour n=10, **cette stratégie donnerait :**

avec une somme aux sommets de 60, une constante de 27 →

Sommets : 1,9,2,10,3,4,5,11,8,7

Milieux : 17,16,15,14,20,18,11,8,12,19