

D1834. La saga des dichotomies (6^{ème} épisode) ****

Soient un triangle ABC et deux points P et Q situés sur deux côtés du triangle tels que PQ partage le périmètre du triangle en deux parties égales.

Quand P parcourt les trois côtés du triangle, déterminer le lieu du milieu M du segment PQ.

SOLUTION Thérèse Eveilleau

Prenons le repère d'origine A et d'axes (AC) et (AB).

Posons dans ce repère, $AP=y$ et $AQ=x$.

Le milieu M de [PQ] a pour coordonnées $x/2$ et $y/2$.

Soit p est le demi-périmètre du triangle, nous avons

$x+y=p$.

Nous avons $x/2 + y/2 = p/2$.

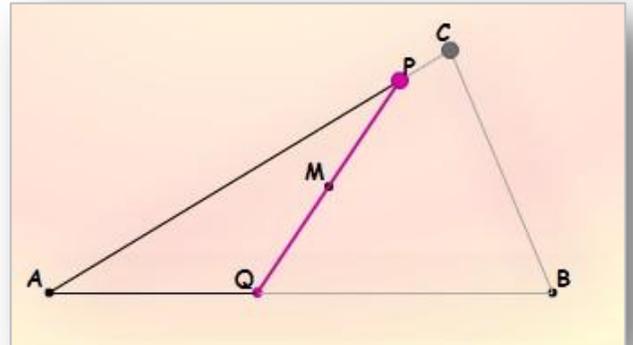
Donc $x_M + y_M = p/2$

$y_M = p/2 - x_M$.

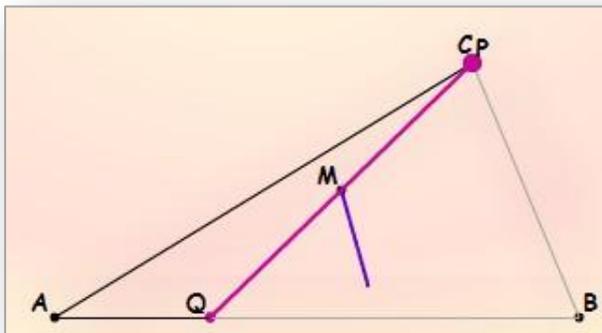
y_M est une fonction affine de x_M .

Le point M décrit donc un segment dont les limites sont déterminées par la position du point P sur [AC] et Q sur [AB].

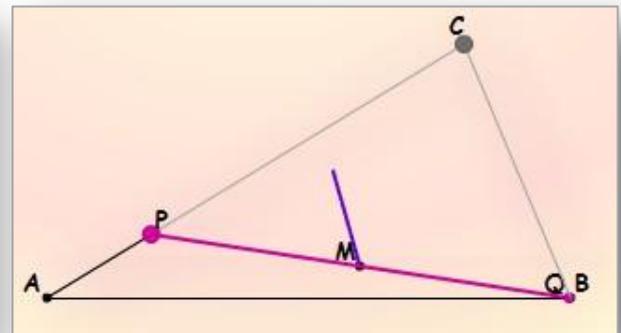
Cette position impliquant que le point Q est ou non sur le côté [AB] et de la même façon que P est ou non sur le côté [AC].



Limite quand P est en C.

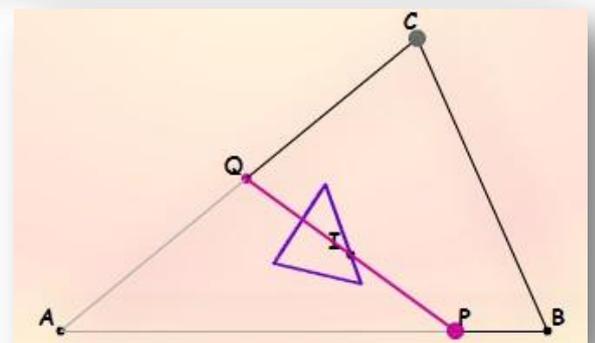


Puis limite quand Q est en B.



Ensuite il suffit de refaire le même raisonnement en prenant comme nouveau repère celui d'origine B et d'axes (BA) et (BC), ou bien d'origine C et d'axes (CA) et (CB).

Nous obtenons finalement trois segments formant un triangle comme lieu du point M milieu de [PQ].



Animation à l'adresse :

http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/iso_perimetre.html