

D1835. La saga des dichotomies *** (7ième épisode)

D1. Géométrie plane : triangles et cercles

Problème proposé par Thérèse Eveilleau et Pierre Renfer

Deux points P et Q sont sur deux côtés d'un triangle ABC tels que le segment [PQ] partage le triangle en deux parties d'aires égales. Déterminer le lieu du milieu M de [PQ] lorsque P parcourt les côtés du triangle.

SOLUTION Thérèse Eveilleau

Prenons le repère d'origine A et d'axes (AC) et (AB).

Posons dans ce repère, $AP=y$ et $AQ=x$.

Soit \mathcal{A} l'aire du triangle.

Si α est l'angle (AP, AQ) , l'aire de (APQ)

est $x*y*\sin(\alpha) = \mathcal{A}/2$

Nous avons donc $x * y = \mathcal{A}/2 * \sin(\alpha)$.

Donc $x*y$ est constant soit \mathcal{C} .

Et par conséquent $(x/2)*(y/2) = \mathcal{C}/4$.

Les coordonnées de M vérifient

$$x_M * y_M = \mathcal{C}/4$$

soit

$$y_M = \mathcal{C}_1 / x_M$$

On a donc une portion **d'hyperbole** limitée par la médiane issue de C.

En refaisant le même raisonnement mais avec un repère d'origine B et d'axes (BA) et (BC), ou bien d'origine C et d'axes (CA) et (CB).

Nous obtenons finalement trois portions d'hyperbole lieu du point M milieu de [PQ].

Chacune de ces portions est limitée par une médiane du triangle ABC.

Nota :

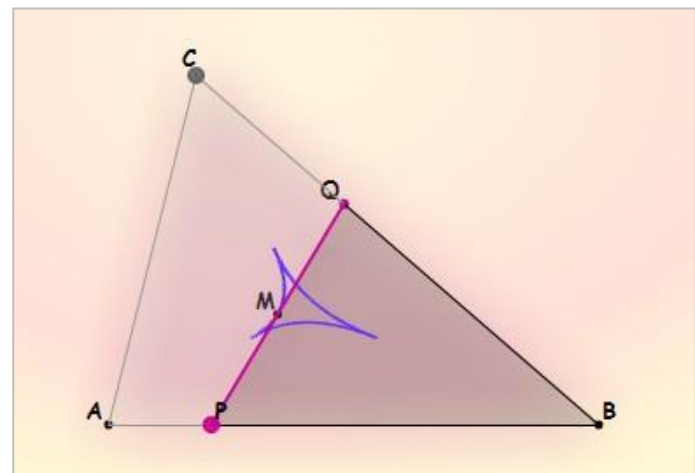
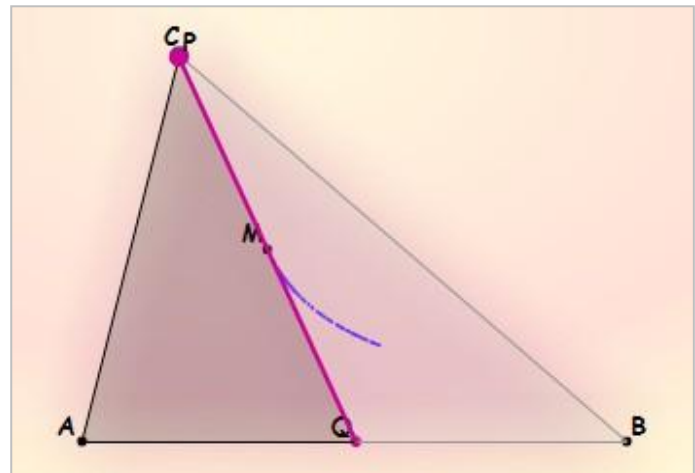
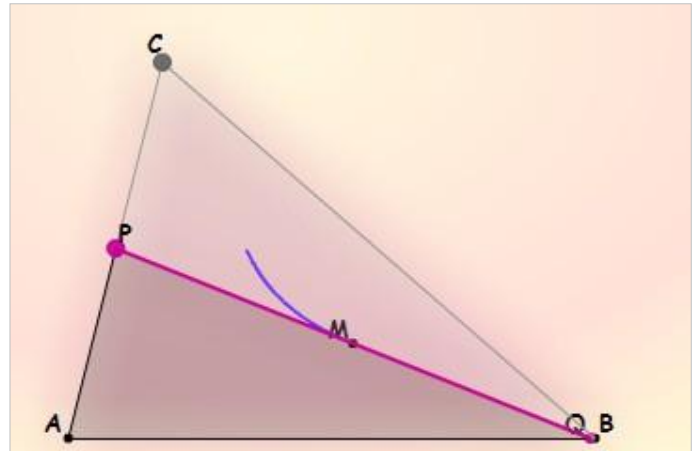
Dans le repère orthonormé (Ay) , (AB) ,

il suffit de projeter P sur l'axe vertical (Oy) et nous avons

$$y' = y*\cos(\beta) ; y = y' / \cos(\beta)$$

Le résultat est obtenu à une constante près : $y_M = (\mathcal{C}_1 / \cos(\beta)) / x_M$

Animation à l'adresse :



http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/iso_aire.html

ou

http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/iso_aire.swf