D1891. La géométrie des couleurs (1er épisode) **

Q_1 Tous les points du plan sont coloriés soit en bleu soit en rouge. Démontrer qu'on sait toujours trouver un triangle équilatéral dont les trois sommets sont de la même couleur.

Q_2 Les sommets d'un triangle dont les angles sont distincts et ≠ 0 modulo 30°, sont coloriés respectivement en bleu (A), en rouge (B) et en vert (C) dans le sens horaire sur le cercle circonscrit à ABC. A partir de deux points quelconques X et Y de couleurs différentes, un tour consiste à colorier de la troisième couleur le sommet Z d'un triangle équilatéral XYZ, l'ordre des couleurs sur le cercle circonscrit à XYZ étant le même que celui du triangle ABC.

Démontrer qu'après un certain nombre de tours les points d'une même couleur sont tous sur une même droite et que les trois droites qui portent les trois couleurs sont concourantes en un point que l'on tracera à la règle et au compas.

PROPOSITION Th Eveilleau

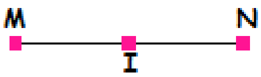
Q_1

<u>Préliminaire</u>

On peut toujours trouver deux points de même couleur dont le milieu est de la même couleur.

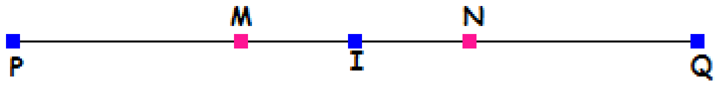
En effet, choisissons deux points **M** et **N** de couleur rouge.
Soit I le milieu de [MN].

- Si **I est de couleur rouge**, les trois points **M, I** et **N** répondent à la question.

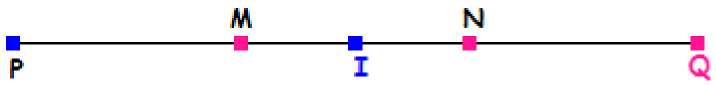


- Si **I est de couleur bleue,** construisons P et Q tels que PM = MN = NQ

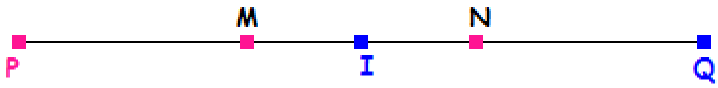
  - Si **P** et **Q** sont bleus, alors les points **P, I** et **Q** répondent à la question.



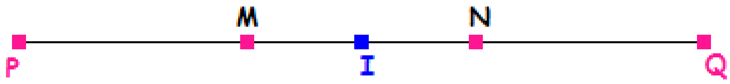
  - Si **P** est bleu et que **Q** est rouge, , alors les points **M, N** et **Q** répondent à la question.



  - Si **P** est rouge et que **Q** est bleu,, alors les points **P, M** et **N** répondent à la question.

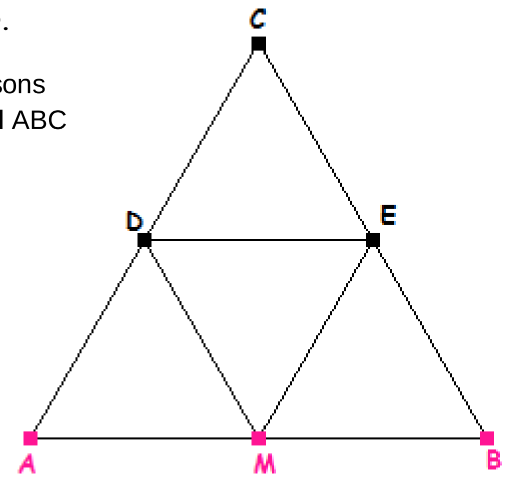


  - Si **P** est rouge et que **Q** est rouge,, alors les points **P, M** et **N** ou **M, N** et **Q** répondent à la question.



<u>**SOLUTION**</u>

➔ A partir de trois points de même couleur, A, M et B tels que M soit le milieu de [AB], nous pouvons toujours sontruire un triangle équilatéral dont les trois sommetd sont de la même couleur.



Choisissons A, M et B (que l'on choisit par exemple rouges).et construisons les triangles équilatéraux suivants à partir du grand triangle équilatéral ABC et les quatre triangles équilatéraux ***DCE***,***ADM***, ***DEM*** et ***MEB***.

Si au moins un des points C, D ou E est rouge , c'st OK :

- Si **D** est rouge, alors le triangle ***ADM*** convient.
- Si **E** est rouge, alors le triangle ***MED*** convient.
- Si **C** est rouge, alors le triangle ***ACB*** convient.

Si aucun des points **C, D** ou **E** n'est rouge , alors ils sont bleus tous les trois et le triangle bleu équilatéral ***CDE*** convient.

Q2

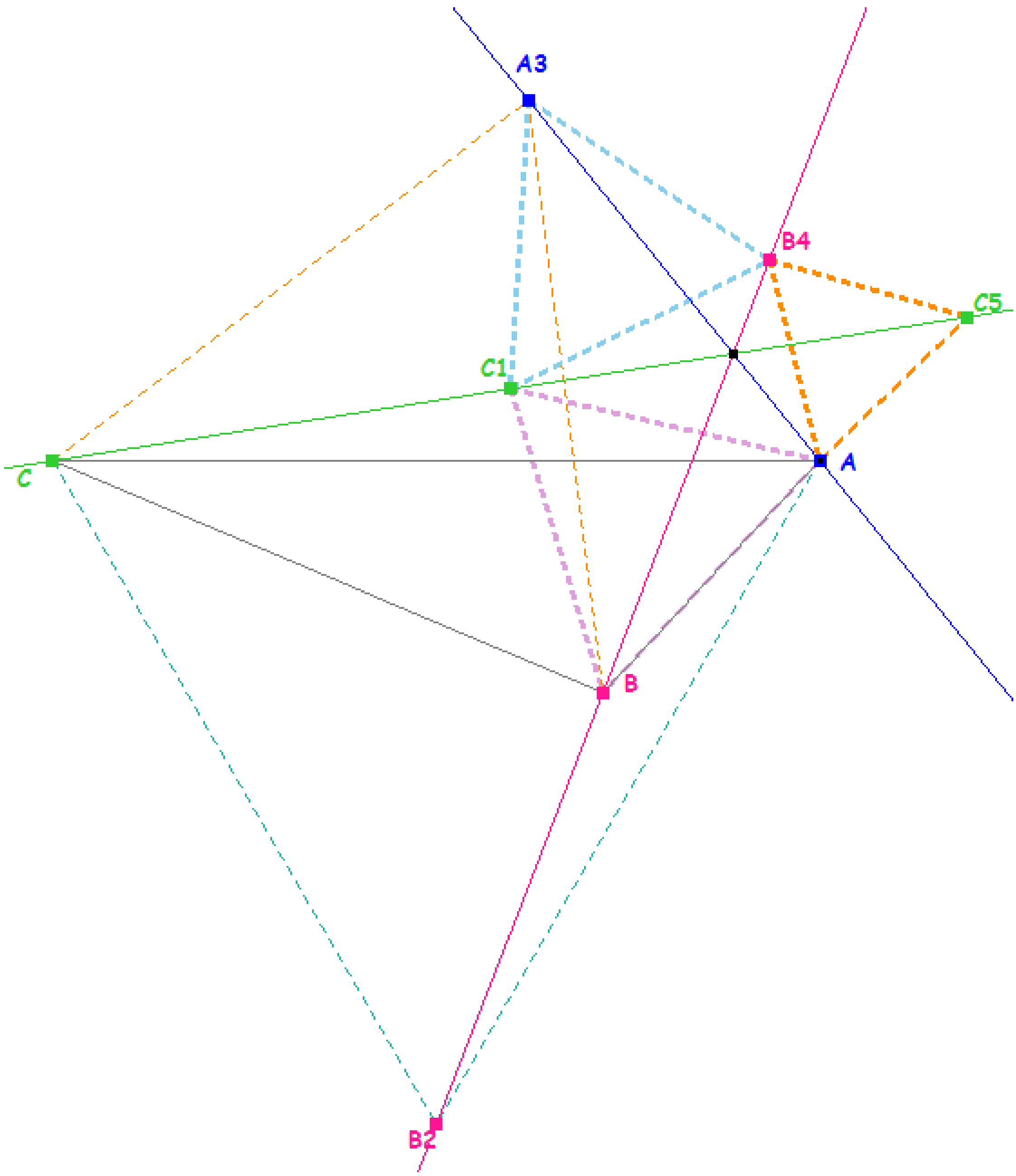
<u>**Il suffit de montrer que les trois premiers points verts , sont alignés.**</u>

Ensuite on obtiendrait de la même façon l'alignement des trois points rouges puis des trois points bleus.

PUIS, en repartant sur un triangle bleu, rouge, vert quelconque, on tiendra l'alignement d'un nouveau point d'une couleur donnée avec ceux de la même couleur.
On aura ainsi démontré l'alignement de tous les points ayant la même couleur.
(Voir les dessins finaux obtenus).

<u>**Démonstration**</u>

<u>Les trois segments [AA3], [BB4] et [C1C5] sont concourants.</u>
Considérons le triangle quelconque AC_1B_4, obtenu avec les différents triangles équilatéraux successifs :
Autour de ce triangle nous avons trosi triangles équilatéraux
Cette construction, est celle du point de Torricelli qui est le point de concours des trois droites :
(A_3A) (C_1C_5) et enfin (BB_4) qui sont concourantes en ce point de **Toricelli**.
Les droites bleues, vertes et rouges sont concourantes et se coupent d'ailleurs en faisant entre elles un angle de 60°, deux à deux.



<u>Les trois points C, C_1 et C5 sont alignés.</u>

.Le triangle **$C_1B_4C_5$** donne par rotation de 60° autour de B_4 le triangle **A_3 B_4A.**

On en déduira que la droite **(A_3A)** donne par une rotation de 60° de la droite **(C_1C_5).**

Ces droites font donc un angle de 60° deux à deux.

*Et en bonus, nous avons **A_3A = C_1C_5** **(*)***

.Le triangle **A_3C_1A** donne par rotation de 60° autour de C_1 le triangle **B_4C_1 B**.

On en déduira que la droite (A_3A) donne par une rotation de 60° la droite (B_4B).

Ces droites font donc un angle de 60° deux à deux. ➔ L'angle (A_3A, B_4B)

Et en bonus nous avons A_3A = BB_4 ***(**)***

Dans une rotation de centre A3 et d'angle 60°, nous avons

B_4 ➔ C_1 *et*

B ➔ C

*Donc le triangle **A_3B_4B ➔ A_3C_1C***

*Donc ces triangles sont isométriques et **C_1C** = **B_4B*** ***(***)***

Nous déduisons que **(BB_4, CC_1) = 60°**

OR **(BB_4, C_1C_5) = 60°**

Cela signifie que **(CC_1) // (CC_5) et enfin que les points C, C_1 et C_5 sont alignés.**

ET comme nous l'avons indiqué en document , le raisonnement serait le même pour montrer que les points

B_2, B et B_4 sont alignés.

A_3, A et A_6 sont alignés.

Il suffit de poursuivre avec les derniers points.

<u>Remarque</u> :

Avec les notes en italique ***(*)*** et ***(**)*** , nous avons :

C_1C_5 = A_3A = BB_4

Avec = ***(***)***, nous déduisons

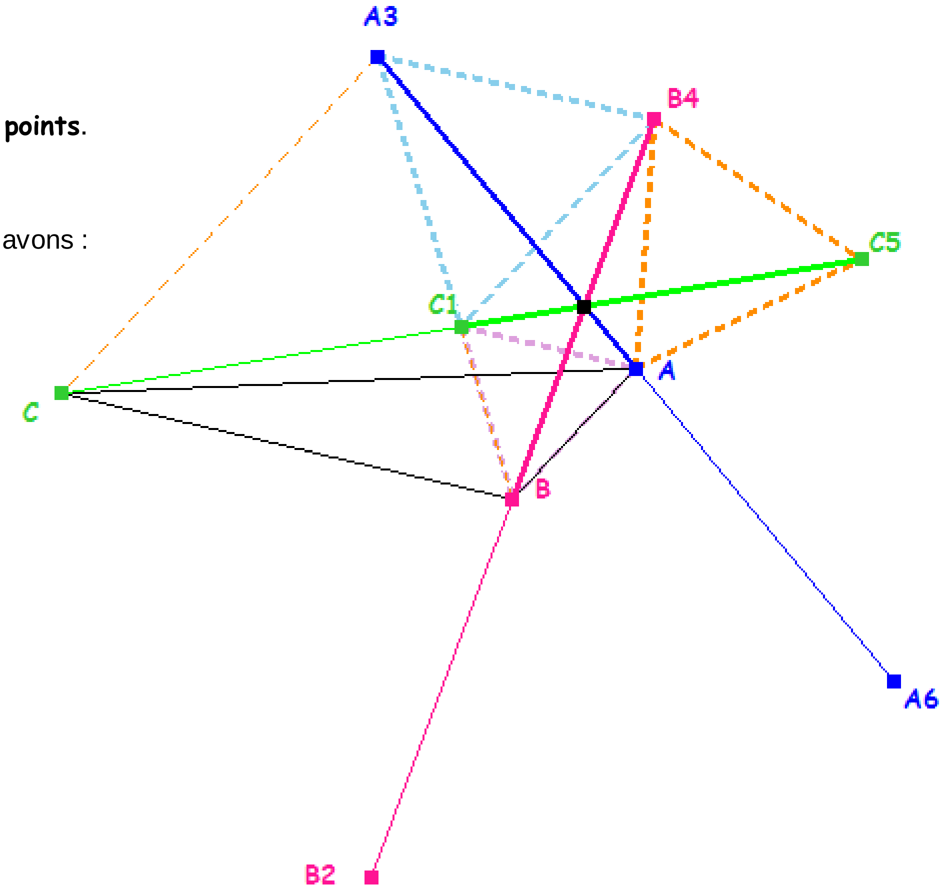
C_1C = C_1C_5 et enfin que

C_1 est le milieu de CC_5.

Nous aurons de la même façon :

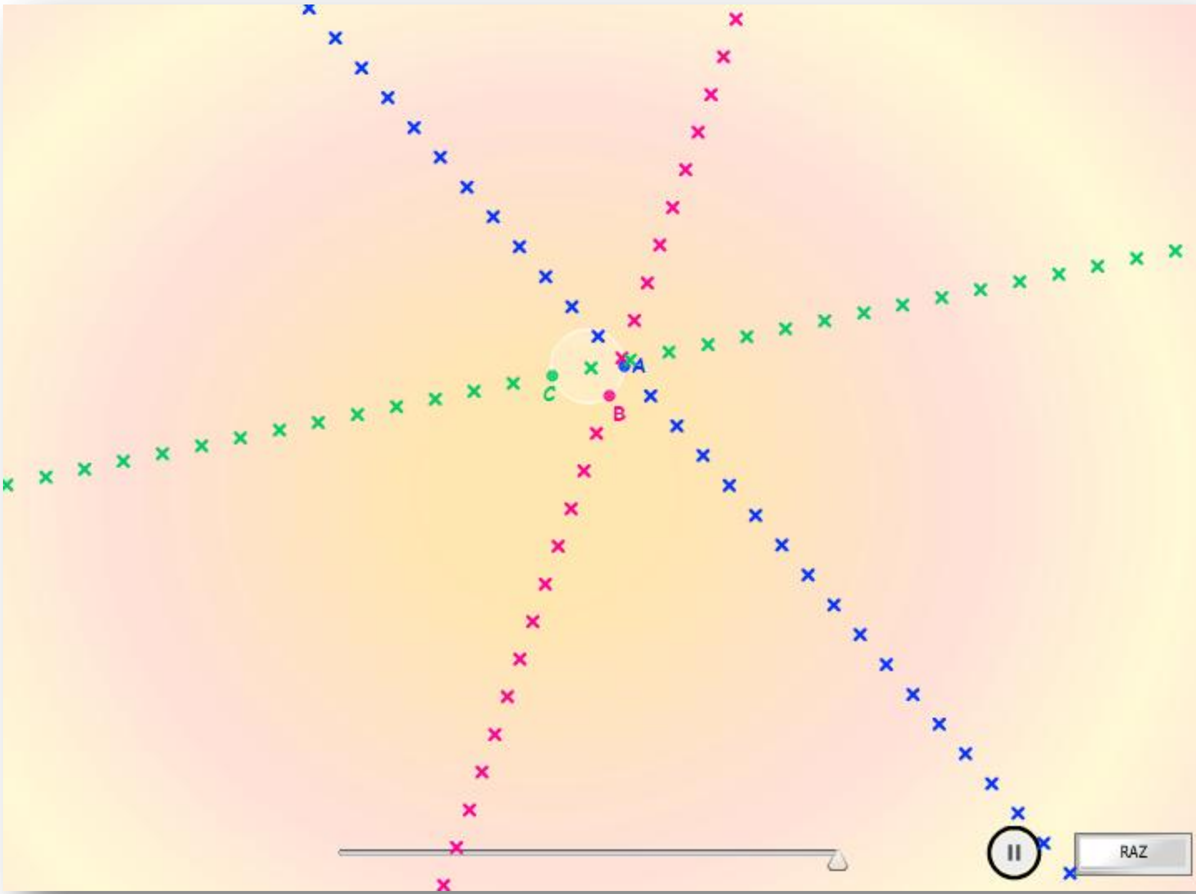
B milieu de [B_2B_4] PUIS

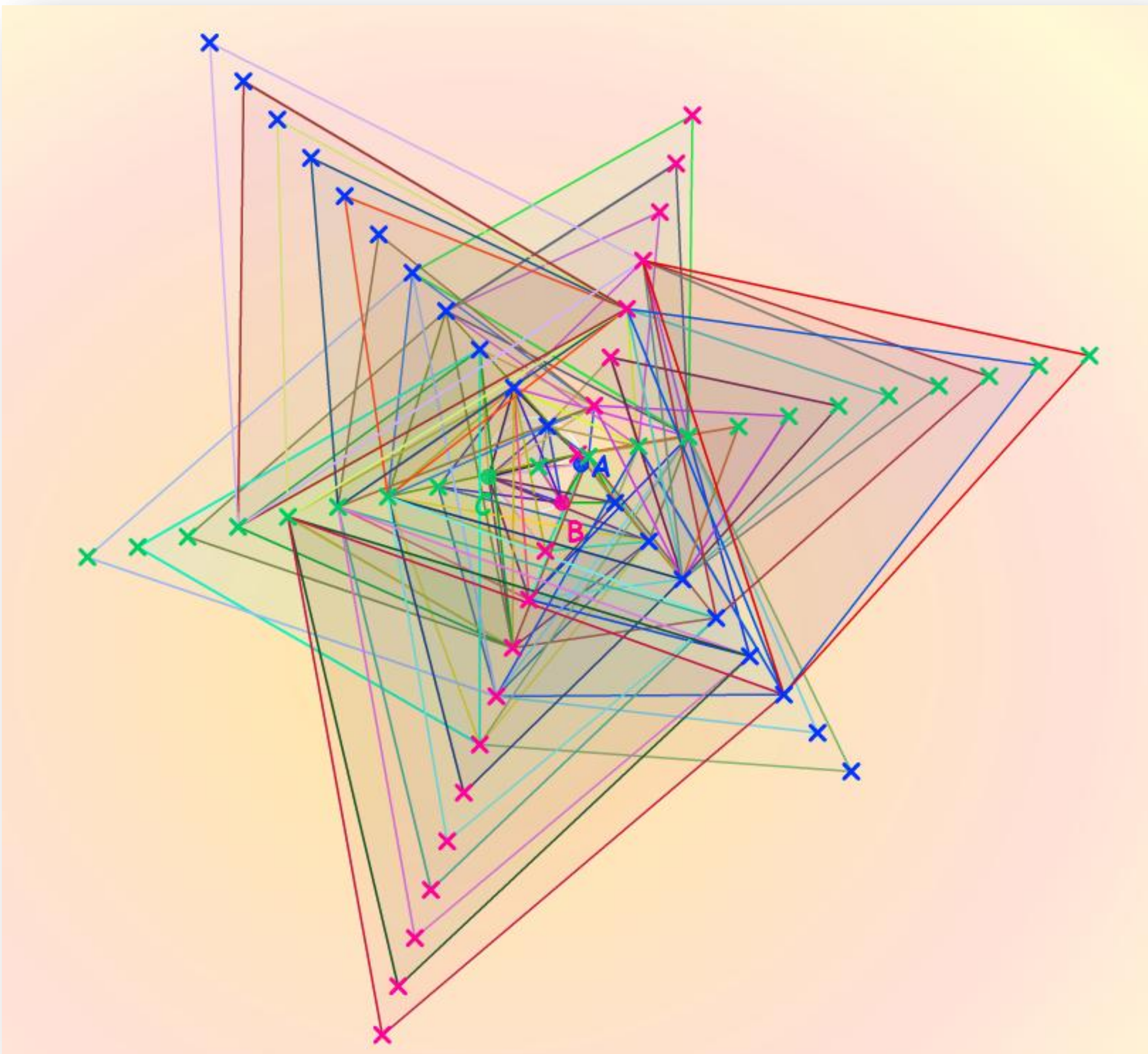
A milieu de [A_3A_6] .



La construction de ces trois droites se fait en construisant successivement les points numérotés de 1 à 3, et en les reliant respectivement aux points **A, B** et **C**.

Les triangles équilatéraux utilisés pour déterminer les points précédents sont évidemment construits à la règle et au compas : (intersection de deux arcs de cercle de rayon, le côté du triangle équilatéral).


A
B
C
RAZ


A
B
C