

G1908. Pilotage de l'incertain *****

Zig lance trois fois de suite un dé à six faces en vue de créer un nombre entier N de trois chiffres.

Il lance le dé une première fois et au vu du résultat il décide la position qu'occupera ce chiffre : chiffre des centaines en première position ou chiffre des dizaines en deuxième position ou chiffre des unités en dernière position.

Après le deuxième lancer Zig décide la position du chiffre obtenu parmi les deux positions restantes.

Il complète le nombre N avec le résultat du troisième lancer.

Q₁ Définir une stratégie qui permet à Zig de rendre maximale l'espérance mathématique E(N) de N et calculer cette valeur maximale.

Q₂ Même question avec un entier N, à quatre chiffres obtenu à l'issue de quatre lancers du dé.

Q₃ Pour les plus courageux : déterminer le plus petit entier k tel qu'à l'issue de k lancers, la valeur maximale de l'espérance mathématique de l'entier N à k chiffres commence par le chiffre 6.

PROPOSITION Th Eveilleau

Q₁

Ma stratégie mène à une espérance de **504**

STRATÉGIE

.Premier tirage

.Si l'on tire 6, 5 le placer en case centaine.

.Si l'on tire 4, 3 placer en case dizaine

.Si l'on tire 2, 1 placer en case unité

Espérance : $1/6(600+500+40+30+2+1) = 195.5$

.Deuxième tirage

Il reste deux positions libres.

Si l'on tire 6, 5 ou 4 placer le chiffre dans la case de plus gros poids :

Si **d** et **u** libres → placer en **d**

Si **c** et **u** libres → placer en **c**

Si **c** et **d** libres → placer en **c**

Si l'on tire 3, 2 ou 1 placer le chiffre dans la case de plus faible poids :

Si **d** et **u** libres → placer en **u**

Si **c** et **u** libres → placer en **u**

Si **c** et **d** libres → placer en **d**

Les différents cas sont équiprobables.

Espérance de gain sur ce deuxième tour

$1/3 * 1/6 * (60+50+40+30+20+10) + 2/3 * 1/6 * (600+500+400) + 2/3 * 1/6 * (3+2+1) = 179$

.Troisième tirage

Il reste une seule position libre.

Chacune est équiprobable.

Espérance de gain sur ce troisième tour

$1/3 * 1/6 (600+500+400+300+200+100) + 1/3 * 1/6 (60+50+40+30+20+10) + 1/3 * 1/6 (6+5+4+3+2+1) = 129.5$

Espérance après trois tirages :

$195.5 + 179 + 129.5 = 504$

Q₂

Même principe de stratégie que la précédente :

.Premier tirage

.Si l'on tire 6, 5 le placer en case mille.

.Si l'on tire 4 placer en case centaine.

.Si l'on tire 3 placer en case dizaine.

.Si l'on tire 2, 1 placer en case unité

Deuxième, troisième et quatrième tirage

Restent trois cases libres.

Utiliser la stratégie optimale vue ci-dessus avec un nombre de trois chiffres et trois lancers.

Lorsque nous tirons 6,5,2 ou 1 au premier tirage, nous pouvons utiliser le résultat de l'espérance pour un nombre de trois chiffres
Ce sera respectivement :

6 504 ou **5 504** ou (cf ci-dessous) pour 4 et 3 **5042** ou **5041**

❖ Lorsque le premier tirage donne **4** :

- **400**

Le nombre à construire est de la forme

m 4 d u

- nous obtenons au deuxième tirage l'espérance

- $1/6 * (6000 + 5000 + 400 + 30 + 2 + 1) = 11073/6 = 1845.5$

- au troisième tirage, nous avons deux positions libres qui sont

soit **md** → $1/3 * 1/6 (6000+5000+4000+30+20+10)$

soit **mu** → $1/3 * 1/6 (6000+5000+4000+3+2+1)$

soit **du** → $1/3 * 1/6 (60+50+40+3+2+1)$

Pour ce cas espérance : **1679**

- au quatrième tirage, nous avons une seule position libre

m : $1/3 * 1/6 (6000+5000+4000+3000+2000+1000)$

d : $1/3 * 1/6 (60+50+40+30+20+10)$

u : $1/3 * 1/6 (6+5+4+3+2+1)$

Pour ce cas espérance : **1179.5**

Espérance pour les quatre tirages avec **4** au premier tour : $400+1845.5+1679+1179.5 = 5104$

❖ Lorsque le premier tirage donne **3**.

- **30**

Le nombre à construire est de la forme

m c 3 u

- nous obtenons au deuxième tirage l'espérance

- $1/6 * (6000 + 5000 + 400 + 300 + 2 + 1) = 11703/6 = 1950.5$

- au troisième tirage, nous avons deux positions libres qui sont

soit **mc** → $1/3 * 1/6 (6000+5000+4000+300+200+100)$

soit **mu** → $1/3 * 1/6 (6000+5000+4000+3+2+1)$

soit **cu** → $1/3 * 1/6 (600+500+400+3+2+1)$

Pour ce cas espérance : de **1784**

- au quatrième tirage, nous avons une seule position libre

m : $1/3 * 1/6 (6000+5000+4000+3000+2000+1000)$

c : $1/3 * 1/6 (600+500+400+300+200+100)$

u : $1/3 * 1/6 (6+5+4+3+2+1)$

Pour ce cas espérance : de **1284.5**

Espérance pour les quatre tirages avec **3** au premier tour : $400+1845.5+1679+1179.5 = 5049$

FINALEMENT l'espérance pour 4 tirages est :

$1/6 (6504 + 5504 + 5104 + 5049 + 5042 + 5041) = 5374$

Q₃

Avec 5 chiffres et 5 jeux → 55975.58333333...

Premier tirage

- .Si l'on tire 6 ou 5, le placer en case dix mille.
- .Si l'on tire 4 le placer en case mille.
- .Si l'on tire 3 placer en case centaine.
- .Si l'on tire 2 placer en case dizaine.
- .Si l'on tire 1 placer en case unité

Ensuite, quatre cases sont libres (utiliser le résultat de Q₂), et on peut obtenir les moyennes (arrondies) :

6 5374 ou 5 5 374 ou ... ou 53741

- ❖ Lorsque le premier tirage donne 4.

4000

Le nombre à construire est de la forme

Dm 4 c d u

- nous obtenons au deuxième tirage l'espérance

$$1/6 * (60000 + 50000 + 400 + 30 + 2 + 1) = 18405.5$$

- au troisième tirage, nous avons trois positions libres qui sont les suivantes mais ne sont pas équiprobables (cela dépend du tirage précédent où *dm* et *u* ont deux fois de chances d'être tirés que *c* et *d*).

soit *Dm c d* → $2/6 * 1/6$ (60000+50000+400+300+20+10) (*u* a été choisi au tour précédent 2 chances sur 6).

soit *Dm c u* → $1/6 * 1/6$ (60000+50000+400+300+2+1) (*d* a été choisi au tour précédent 1 chance sur 6).

soit *Dm d u* → $1/6 * 1/6$ (60000+50000+40+30+2+1) (*c* a été choisi au tour précédent 1 chance sur 6).

soit *c d u* → $2/6 * 1/6$ (600+500+40+30+2+1) (*dm* a été choisi au tour précédent 2 chance sur 6).

Pour ce cas espérance : 12349.5

- au quatrième tirage, nous avons deux positions libres. Il y a six possibilités qui sont équiprobables :

Dm c → $3/18 * 1/6$ (60000+50000+40000+300+200+100)

Dm d → $3/18 * 1/6$ (60000+50000+40000+30+20+10)

Dm u → $2/18 * 1/6$ (60000+50000+40000+3+2+1)

c d → $4/18 * 1/6$ (600+500+400+30+20+10)

c u → $3/18 * 1/6$ (600+500+400+3+2+1)

d u → $3/18 * 1/6$ (60+50+40+3+2+1)

Pour ce cas espérance l'espérance est de 11233.5

- au cinquième tirage, nous avons une seule position libre

Dm : $8/36 * 1/6$ (60000+50000+40000+30000+20000+10000)

c : $10/36 * 1/6$ (600+500+400+300+200+100)

d : $10/36 * 1/6$ (60+50+40+30+20+10)

u : $8/36 * 1/6$ (6+5+4+3+2+1)

Pour ce cas espérance : 7885.5

Espérance pour les cinq tirages avec 4 au premier tour : 53874

- ❖ Lorsque le premier tirage donne 3.

300

Le nombre à construire est de la forme

Dm m 3 d u

- nous obtenons au deuxième tirage l'espérance

$$1/6 * (60000 + 50000 + 4000 + 30 + 2 + 1) = 19005.5$$

- au troisième tirage, nous avons trois positions libres qui sont les suivantes et ne sont pas équiprobables.

soit $Dm m d \rightarrow 2/6 * 1/6 (60000+50000+4000+3000+20+10)$

soit $Dm m u \rightarrow 1/6 * 1/6 (60000+50000+4000+3000+2+1)$

soit $Dm d u \rightarrow 1/6 * 1/6 (60000+50000+40+30+2+1)$

soit $m d u \rightarrow 2/6 * 1/6 (6000+5000+40+30+2+1)$

Pour le troisième tirage l'espérance est de **13424.5**

- au quatrième tirage, nous avons deux positions libres

$Dm m \rightarrow 3/18 * 1/6 (60000+50000+40000+3000+2000+1000)$

$Dm d \rightarrow 3/18 * 1/6 (60000+50000+40000+30+20+10)$

$Dm u \rightarrow 2/18 * 1/6 (60000+50000+40000+3+2+1)$

$m d \rightarrow 4/18 * 1/6 (6000+5000+4000+30+20+10)$

$m u \rightarrow 3/18 * 1/6 (6000+5000+4000+3+2+1)$

$d u \rightarrow 3/18 * 1/6 (60+50+40+3+2+1)$

Pour le quatrième tirage l'espérance est de **12258.5**

- au cinquième tirage, nous avons une seule position libre

$Dm : 8/36 * 1/6 (60000+50000+40000+30000+20000+10000)$

$m : 10/36 * 1/6 (6000+5000+4000+3000+2000+1000)$

$d : 10/36 * 1/6 (60+50+40+30+20+10)$

$u : 8/36 * 1/6 (6+5+4+3+2+1)$

Pour le quatrième tirage l'espérance est de **8760.5**

Espérance pour les cinq tirages avec **3** au premier tour : **53749**

❖ Lorsque le premier tirage donne **2**, le nombre à construire est de la forme

$Dm m c 2 u$

- nous obtenons au deuxième tirage l'espérance

20

$$1/6 * (60000 + 50000 + 4000 + 300 + 2 + 1) = 19050.5$$

- au troisième tirage, nous avons trois positions libres qui sont

soit $Dm m c \rightarrow 2/6 * 1/6 (60000+50000+4000+3000+200+100)$

soit $Dm m u \rightarrow 1/6 * 1/6 (60000+50000+4000+3000+2+1)$

soit $Dm c u \rightarrow 1/6 * 1/6 (60000+50000+400+300+2+1)$

soit $m c u \rightarrow 2/6 * 1/6 (6000+5000+400+300+2+1)$

Pour le troisième tirage l'espérance est de **13492**

- au quatrième tirage, nous avons deux positions libres

$Dm m \rightarrow 3/18 * 1/6 (60000+50000+40000+3000+2000+1000)$

$Dm c \rightarrow 3/18 * 1/6 (60000+50000+40000+300+200+100)$

$Dm u \rightarrow 2/18 * 1/6 (60000+50000+40000+3+2+1)$

$m c \rightarrow 4/18 * 1/6 (6000+5000+4000+300+200+100)$

$m u \rightarrow 3/18 * 1/6 (6000+5000+4000+3+2+1)$

$c u \rightarrow 3/18 * 1/6 (600+500+400+3+2+1)$

Pour le quatrième tirage l'espérance est de **12331**

- au cinquième tirage, nous avons une seule position libre

$Dm : 8/36 * 1/6 (60000+50000+40000+30000+20000+10000)$

$m : 10/36 * 1/6 (6000+5000+4000+3000+2000+1000)$

$c : 10/36 * 1/6 (600+500+400+300+200+100)$

$u : 8/36 * 1/6 (6+5+4+3+2+1)$

Pour le quatrième tirage l'espérance est de **8848**

Espérance pour les cinq tirages avec **2** au premier tour : **53741.5**

FINALEMENT l'espérance pour 5 tirages est d'environ :

$1/6 (6 \cdot 5374 + 5 \cdot 374 + 53874 + 53749 + 53741.5 + 53741) = 55975.58333333 \dots$

La simulation, sur le principe précédent, permet d'obtenir avec 100 000 expériences :

http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/G1908_S.html

Le mode Ultra rapide permet d'obtenir un résultat quasi immédiat.

Pour $k=5$, environ **55975**

A partir de là : on met 6, 5, 4 forts sur les trois unités les plus fortes et les 3, 2, 1 sur centaines, dizaines, unités.

Les résultats suivants proviennent de la simulation.

Pour $k=6$, environ **577219**

Pour $k=7$, environ **5915500**

Pour $k=8$, environ 60336000

Les derniers résultats sont évidemment légèrement différents à chaque simulation selon le nombre d'expériences, mais les trois premiers chiffres ne varient pas.

Principe de la simulation ci-après.

Puis $k=8$, on atteint une espérance commençant par le chiffre 6.

Principe pour le jeu de longueur 6 par exemple

```
function jeu6() {
    n=0;

    //Tirage aléatoire
    var p=tirage();
    var n=jeu5();
    var dm=Math.floor(n/10000);
    var m=Math.floor(n/1000)%10;
    var c=Math.floor(n/100)%10;
    var d=Math.floor(n/10)%10;
    var u=Math.floor(n%10);

    if (p==6) {
        n=p*100000+n;
    }
    if (p==5) {
        n=p*10000+100000*dm+1000*m+100*c+10*d+u;
    }
    if (p==4) {
        n=p*1000+100000*dm+10000*m+100*c+10*d+u;
    }
    if (p==3) {
        n=p*100+dm*100000+10000*m+1000*c+10*d+u;
    }
    if (p==2) {
        n=p*10+dm*100000+10000*m+1000*c+100*d+u;
    }
    if (p==1) {
        n=p+10*n;
    }

    return (n);
}
```