G1911-Un robot à la découpe ****

A PizzaTech les pizzas sont de forme circulaire et elles sont découpées par un robot. Celui-ci choisit au hasard et indépendamment l'un de l'autre deux points sur la circonférence de la pizza puis fait une coupe selon la corde qui relie ces deux points.

Q_1 Vous demandez une pizza de taille moyenne en spécifiant que le robot réalise exactement trois coupes. Déterminez l'espérance mathématique du nombre de morceaux qui vous seront servis.

Q_2 Vous souhaitez une pizza de très grande taille pour 15 personnes. Déterminez le nombre de coupes qu'il convient de demander au robot pour obtenir une espérance mathématique aussi proche que possible de 15 morceaux.

Nota : bien entendu, dans un cas comme dans l'autre, le client admet que les morceaux découpés n'ont pas la même surface.

PROPOSITION Th Eveilleau

Q_1

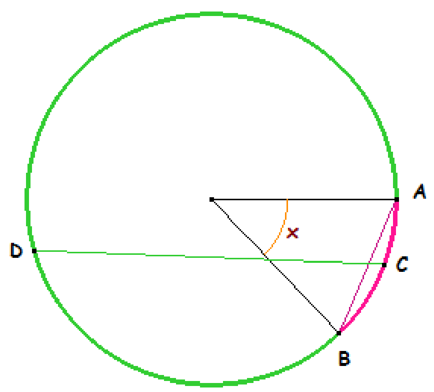
Avec trois coupes, donc trois cordes dans le disque, nous pouvons obtenir au maximum 7 morceaux.

Une corde donne deux morceaux.
Deux cordes donnent au maximum 4 morceaux, minimum 2 (quand elles sont confondues), 3 morceaux quand elles en sont pas sécantes.

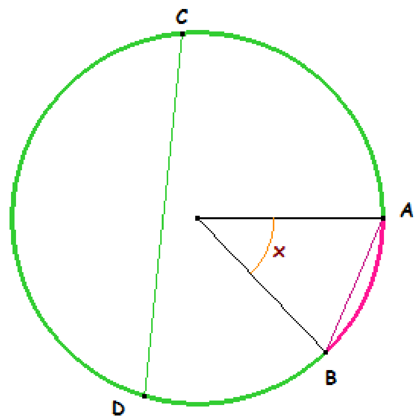
La moyenne du nombre de morceaux avec deux cordes est **3.33** :
en effet (cf calcul ci-après),
on a une chance sur trois que els cordes se coupent et deux chances sur trois que les cordes se coupent.
Cela donne pour deux cordes une espérance $\mathcal{E}$ de :

$\mathcal{E}$ = 3*2/3 + 4*1/ 3 = 3+1/3 ~ 3.33

<u>Quelle est la probabilité que deux cordes se coupent dans un disque ?</u>



Cordes sécantes → 4 régions



Cordes non sécantes → 3 régions

Soit ***O*** le centre du disque.

Analysons les deux cordes ***CD*** et ***AB***
Sans nuire à la généralité du problème, fixons le point A. et faisons varier le point ***B***, donc l'angle $x=\angle AOB$.

Pour les cordes sécantes,
Pour que les deux cordes soient sécantes, il faut et il suffit que les points ***C*** et ***D*** soient situés l'un l'arc rouge l'autre sur l'arc ver (fig ci-dessus gauche).,
L'angle $\angle AOD$, peut varier de x à 360 ; et l'angle $\angle AOC$, peut varier de 0 à x.

La probabilité est donc de **$(360-x)*x / 360^2$** pour une valeur donnée de x.

Pour toutes les valeurs de x variant de 0 à 360 , nous aurons une probabilité de

$$\frac{2}{360}\int_0^{360}\frac{(360-x)*x}{360^2}dx = \frac{2}{360} * \frac{1}{360^2}\left[360 * x^2/2 - x^3/3\right]_0^{360} = 2*(\tfrac{1}{2} -1/3) = \mathbf{1/3}$$

Rq : Le facteur 2, provient du rôle symétrique de C et D.

Pour deux cordes sécantes ➔ probabilité 1/3.

Pour deux cordes non sécantes ➔ probabilité 2/3.
Vérification :
Pour que les cordes ne soient pas sécantes, il faut et il suffit que les points ***C*** et ***D*** soient tous les deux soit sur l'arc vert, soit tous les deux sur l'arc rouge.

La probabilité est donc de $(360-x)^2 / 360^2 + x^2 / 360^2$ pour une valeur donnée de x.

Pour les différentes valeurs de x, ce sera :

$$\frac{1}{360}\int_0^{360}\frac{(360-x)^2+x^2}{360^2}dx = \frac{1}{360^3}\int_0^{360}(360^2 - 720 * x + 2x^2)dx$$

$$= \frac{1}{360^3}\left[360^2 * x - 720 * x^2/2 + 2*x^3/3\right]_0^{360} = \frac{1}{360^3}\left[360^3 - 360^3 + 360^3 *2/3\right] = \mathbf{2/3}$$

DONC pour deux cordes
M_2 = 3* 2/3 + 4*1/3 = 10/3 = 3.33
M_2 = 3.33

Quelle est l'espérance du nombre de régions avec trois cordes ?

En réitérant le procédé et en utilisant ce dernier résultat *M_2 = 3.33*, nous obtenons pour trois cordes :

La troisième corde ne coupe aucune des deux autres ($\binom{2}{0}$ =1 seule façon de se produire), donnant à chaque fois **1** région de plus qu'avec deux cordes.
Ceci augmente l'espérance précédente de* 1*, pour chaque cas.
➔ **1** * $\binom{2}{0}$ * 2/3 * 2/3 **= 1 * 4/9**

La troisième corde ne coupe qu'une seule des deux autres : $\binom{2}{1}$ =2 façons de se produire, donnant à chaque fois **2** régions de plus qu'avec deux cordes.
Ceci augmente l'espérance précédente de* 2*, pour chaque cas.
➔ **2** * $\binom{2}{1}$ * 1/3 * 2/3 **= 2 * 4/9**

La troisième corde coupe les deux autres : $\binom{2}{2}$ =1 façon de se produire.
Ceci augmente l'espérance précédente de* 3*, pour chaque cas.
➔**3** * $\binom{2}{2}$ * 1/3 * 1/3 **= 3 * 1/9**

Espérance :
M_3 = 3 + 1/3 + **1** * $\binom{2}{0}$ * 2/3 * 2/3 + **2** * $\binom{2}{1}$ * 1/3 * 2/3 + **3** * $\binom{2}{2}$ * 1/3 1/3
M_3 = 3 + 1/3 + 4/9 + 8/9 + 3/9 = 3 + 18/9 = 3+2 = 5
M_3 = 5

Trois cordes donnent une espérance de 5 régions.

Q_2

Avec 4 cordes la moyenne est de $\mathbf{M_4 = 7}$.
En effet partant de 3 cordes nous regardons le nombre d'intersections de la quatrième corde avec les autres.

0 intersection, on a 1 région de plus ➔ 1 seule façon = $\binom{3}{0}$;

1 intersection on ajoute 2 régions ➔ 3 façons = $\binom{3}{1}$;

2 intersections on ajoute 3 régions ➔ 3 façons = $\binom{3}{2}$;

3 intersections on ajoute 4 régions ➔ 1 façon = $\binom{3}{3}$;

$M_4 = 5 + \binom{3}{0} *1*2/3*2/3*2/3+ \binom{3}{1} *2*1/3*2/3*2/3+ \binom{3}{2} *3*1/3*1/3*2/3 + \binom{3}{3} *4*1/3*1/3*1/3$

$M_4 = 5 + (8+24+18+4)/27 = 5 +54/27$

$\mathbf{M_4 = 7}$.

On continue de la même façon :

Avec 5 cordes la moyenne est de $\mathbf{M_5 \sim 9.33}$

$M_5 =7+\binom{4}{0} *1*2/3*2/3*2/3*2/3+\binom{4}{1} *2*1/3*2/3*2/3*2/3+\binom{4}{2} *3*1/3*1/3*2/3*2/3 + \binom{4}{31} *4*1/3*1/3*1/3*2/3 +\binom{4}{14} *5*1/3*1/3*1/3*1/3$

$M_5 = 7 + (16 + 64 + 72 + 32 + 5) / 81 = 7+189/27$

$\mathbf{M_5 = 9+1/3}$.

Avec 6 cordes l'espérance est de $\mathbf{M_6 = 12}$

$M_6 = 9.33 + \binom{5}{0} *1*2^5/3^5 +\binom{5}{1} *2*2^4/3^5 + \binom{5}{2} *3*2^3/3^5 + \binom{5}{3} *4*2^2/3^5 + \binom{5}{4} *5*2/3^5 + \binom{5}{5} *6*/3^5$

$M_6 = 9 +1/3 + (32 + 160 + 240 +160 + 50 + 6) / 243 = 9 +3 = 12$

$\mathbf{M_6 = 12}$.

Avec 7 cordes l'espérance est de $\mathbf{M_7 = 15}$

$M_7 = 12 +\binom{6}{0} *1*2^6/3^6 +\binom{6}{1} *2*2^5/3^6 +\binom{6}{2} *3*2^4/3^6 +\binom{6}{3} *4*2^3/3^6 +\binom{6}{4} * 5*2^2/3^6 +\binom{6}{5} *6*2/3^6 + \binom{6}{6} *7*/3^6$

$M_7 = 12 + 1*1*2^6/3^6 +6*2*2^5/3^6 + 15*3*2^4/3^6 + 20*4*2^3/3^6 + 15*5*2^2/3^6 + 6*6*2/3^6 + 1*7/3^6$

$M_7 = 12 + (64 + 384 + 720+ 640 + 300 + 72 + 7) / 729 = 12 +3 = 15$

$\mathbf{M_7 = 15}$.

Avec 7 cordes l'expérimentation numérique donne une espérance exacte de **15**.

La réponse est 7 cordes.

PUIS

Avec 8 cordes :

$M_8 = 15 + 1*1*2^7/3^7 +7*2*2^6/3^7 + 21*3*2^5/3^7 + 35*4*2^4/3^7 + 35*5*2^3/3^7 + 21*6*2^2/3^7 + 7*7*2/3^7 + 1*8/3^7$

$\mathbf{M_8 = 18+1/3}$.

Avec 9 cordes :

$M_9 = 18 + 1/3 + 1*1*2^8/3^8 + 8*2*2^7/3^8 + 28*3*2^6/3^8 + 56*4*2^5/3^8 +70*5*2^4/3^8 + 56*6*2^3/3^8 + 28*7*2^2/3^8 + 8*8*2/3^8 + 1*9/3^8$

$\mathbf{M_9 = 22}$.

Etc.