

## G1953 - Toujours perdant toujours gagnant \*\*\*\*

Diophante met à la disposition de Zig six dés ( $D_j$ ,  $j = 1$  à 6) ayant chacun 6 faces entièrement blanches et un lot important de gommettes autocollantes portant les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Zig colle à sa convenance des gommettes sur les 6 faces de chaque dé (une gommette par face) de sorte qu'il obtient la même somme 21 des numéros inscrits sur les six faces.

Puce choisit alors un des six dés et Zig choisit un des cinq dés restants. Ils lancent en même temps leur dé mille fois. Celui qui obtient le plus grand numéro marque un point, sinon match nul. Le gagnant est celui qui a marqué le plus grand nombre de points.

Est-il vrai qu'en plaçant de manière adéquate les gommettes sur les six dés, quel que soit le dé  $D_j$  choisi par Puce, Zig sait trouver un dé  $D_k$  qui lui permet d'obtenir plus de points que Puce à l'issue des mille lancers. Justifiez votre réponse.

### Proposition Th Eveilleau

- Il faut configurer les dés, de façon à ce que la probabilité que Zig gagne soit supérieure à celle que Puce gagne lorsqu'il choisit un dé donné.

En jouant 1000 fois de suite, la chance de gagner de ZIG sera sensiblement égale à la probabilité :

*La loi des grands nombres nous indique que si un dé a une probabilité de gain  $p > 0,5$  sur un lancer, la probabilité que ce dé remporte le plus de points sur 1000 lancers tend vers 1 (100 %).*

- Quel que soit le dé choisi par Puce, Zig doit trouver un dé donnant une probabilité plus forte de gagner.

C'est assez contreintuitif. En effet appelons les dés, A, B, C, D, E, F.

Notons  $A < B$  le fait que la probabilité de gagner avec B soit meilleure que celle de A.

Alors par exemple :

$$A < B ; B < C ; C < D ; D < E ; E < F$$

Et si Puce choisit F, on a l'impression que Zig n'a à sa disposition que des dés plus faibles que celui de PUCE.

Pour que Zig puisse gagner, la relation ci-dessous ne doit pas être **transitive** !

Or cette relation n'est pas transitive.

### Exemple avec 3 sortes de dés :

Deux dés de la configuration A :	Deux dés de la configuration B :	Deux dés de la configuration C :
(1, 4, 4, 4, 4, 4)	(3, 3, 3, 3, 3, 6)	(2, 2, 2, 5, 5, 5)
(1, 4, 4, 4, 4, 4)	(3, 3, 3, 3, 3, 6)	(2, 2, 2, 5, 5, 5)

#### . Puce choisit un dé A, alors

-- si Zig joue B, il gagne si :  
 Puce joue 1, Zig joue ou 3 ou 6  
 Puce joue 4, Zig joue 6  
 Probabilité que Zig gagne :  $1/6 * 1 + 5/6 * 1/6 = 11/36 < 0.5$  Zig n'aucune chance en 1000 jeux.

- si **Zig joue C**, il gagne si :  
 Puce joue 1, Zig joue ou 2 ou 5 peu importe  
 Puce joue 4, Zig joue 5  
 Probabilité que Zig gagne :  $1/6 * 1 + 5/6 * 3/6 = 21/36 \sim 58.33\% > 0.5 \rightarrow \text{ZIG a toutes chances de gagner sur 1000 jeux.}$

#### . Puce choisit un dé B, alors

-- si **Zig joue A, il gagne si :**  
 Puce joue 3, Zig joue 4  
 Puce joue 6, Zig perd  
 Probabilité que Zig gagne :  $5/6 * 5/6 + 1/6 * 0 = 25/36 \rightarrow > 0.5 \text{ ZIG a toutes chances de gagner sur 1000 jeux.}$

-- si **Zig joue C, il gagne si :**  
 Puce joue 3, Zig joue 5  
 Puce joue 6, Zig joue 5  
 Probabilité que Zig gagne :  $5/6 * 3/6 + 1/6 * 0 = 15/36 \sim 41.66\% < 0.5$  Zig n'aucune chance en 1000 jeux.

#### . Puce choisit un dé C, alors

-- si **Zig joue A, il gagne si :**  
 Puce joue 2, Zig joue 4  
 Puce joue 5, Zig perd  
 Probabilité que Zig gagne :  $3/6 * 5/6 + 1/6 * 0 = 15/36 \rightarrow < 0.5$  Zig n'aucune chance en 1000 jeux.

-- si **Zig joue B, il gagne si :**  
 Puce joue 2, Zig gagne  
 Puce joue 5, Zig joue 6  
 Probabilité que Zig gagne :  $3/6 * 1 + 3/6 * 1/6 = 21/36 > 0.5 \text{ ZIG a toutes chances de gagner sur 1000 jeux.}$

Nous avons donc : **C>A ; A>B ; B>C.**



Zig a d'autres possibilités par exemple avec six dés A, B, C, D, E, F

A : (5, 5, 5, 2, 2, 2)	B : (4, 4, 4, 4, 4, 1)	C : (6, 3, 3, 3, 3, 3)
D : (5, 5, 3, 3, 3, 2)	E : (6, 4, 3, 3, 3, 2)	F : (3, 3, 3, 3, 4, 5)

. Puce choisit le dé A, alors ZIG gagne quand

**Zig joue C,**

Puce joue 2, Zig 3 ou 6

Puce joue 5, Zig joue 6

Probabilité que Zig gagne :  $3/6 * 6/6 + 3/6 * 1/6 = 21/36$

$\sim 58.33\% > 0.5 \rightarrow \text{ZIG a toutes chances de gagner sur 1000 jeux.}$

. Puce choisit le dé B, alors

**Zig joue A,**

Puce joue 4, Zig joue 5

Puce joue 1, Zig joue 5 ou 2

Probabilité que Zig gagne :  $5/6 * 3/6 + 1/6 * 6/6 = 21/36$

$\sim 58.33\% > 0.5 \rightarrow \text{ZIG a toutes chances de gagner sur 1000 jeux.}$

. Puce choisit le dé C, alors

**Zig joue B,**

Puce joue 3, Zig joue 4

Puce joue 6, Zig perd

Probabilité que Zig gagne :  $5/6 * 5/6 = 25/36$

$\sim 69.44\% > 0.5 \rightarrow \text{ZIG a toutes chances de gagner sur 1000 jeux.}$

. Puce choisit le dé D, alors

**Zig joue B,**

Puce joue 2, Zig joue 4

Puce joue 3, Zig joue 4

Puce joue 5, Zig perd

Probabilité que Zig gagne :  $1/6 * 5/6 + 3/6 * 5/6 = 20/36$

$\sim 55.55\% > 0.5 \rightarrow \text{ZIG a toutes chances de gagner sur 1000 jeux.}$

. Puce choisit le dé E, alors

**Zig joue B,**

Puce joue 2, Zig joue 4

Puce joue 3, Zig joue 4

Probabilité que Zig gagne :  $1/6 * 5/6 + 3/6 * 5/6 = 20/36$

$\sim 55.55\% > 0.5 \rightarrow \text{ZIG a toutes chances de gagner sur 1000 jeux.}$

. Puce choisit le dé F, alors

**Zig joue B,**

Puce joue 3, Zig joue 4

Puce joue 4 ou 5 Zig perd

Probabilité que Zig gagne :  $4/6 * 5/6 = 20/36$

$\sim 55.55\% > 0.5 \rightarrow \text{ZIG a toutes chances de gagner sur 1000 jeux.}$