G196. Stop ! Seuil à ne pas dépasser ****

Vous lancez un dé à 6 faces supposé parfait autant de fois que vous le souhaitez et vous calculez la somme des numéros obtenus depuis le premier lancer. Quand vous vous arrêtez, la somme devient votre score à condition qu'elle ne dépasse pas le seuil k = 13, sinon votre score est nul. Déterminez la meilleure stratégie qui permet de maximiser l'espérance mathématique de votre score et démontrez que celle-ci peut être supérieure à 10.
Pour les plus courageux: le seuil à ne pas dépasser étant un entier k quelconque > 20, trouvez une formule approchée donnant l'espérance mathématique optimale de votre score.

Proposition Th Eveilleau

Q1

Une bonne stratégie sera de s'arrêter dès que l'on approchera d'un seuil qui donnera la meilleure espérance si possible supérieure à 10.

Déterminons les probabilités d'obtenir certains scores avec un seuil de **9** donné par l'expérimentation qui nous mène à une espérance légèrement **supérieure à 10**.

En un seul lancer de dés (proba p1)

p1(X=1) = **1//6**
p1 (X=2) = **1/6**
p1 (X=3) = **1/6**
p1 (X=4) =**1/6**
p1 (X=5) = **1/6**
p1 (X=6) = **1/6**

Cherchons le seuil

Quand on atteint le total ***t***, à une étape donnée, le nouveau lancer va donner un variation de l'espérance de :
Jusqu'à t=7, on augmente l'espérance de :

$$\sum_{i=1}^{i=13-t} \left(\frac{1}{6}\right) * \mathrm{i} = 1/6 \ \ *[\,(1+2+3+\ldots+(13 - t)$$

t=0 ➔ (1/6) [13*14/2] = 91/6
t=1 ➔ (1/6) [12*13/2] = 78/6
t=2 ➔ (1/6) [11*12/2] = 66/6
t=3 ➔ (1/6) [10*11/2] = 55/6
t=4 ➔ (1/6) [9*10/2] = 45/6
t=5➔ (1/6) [8*9/2] = 36/6
t=6 ➔ (1/6) [7*8/] = 28/6
t=7 ➔ (1/6) [6*7/2] = 21/6

Ensuite selon le jeu on l'augmente ou diminue et la variation de l'espérance est :

$$\sum_{i=1}^{i=13-t} \left(\frac{1}{6}\right) * \mathrm{i} \; - \; \sum_{i=14-t}^{i=6} \left(\frac{1}{6}\right) * \mathrm{t}$$ = 1/6 *[(1+2+3+…+(13 – t) – t * (9-t)]

t=8 ➔ (1/6) [5*6/2 - 8*1] = 7/6
t=9➔ (1/6) [4*5/2 - 9*2] = -8/6
t=10 ➔ (1/6) [3*4/2 - 10*3] = -24/6

Autre façon de voir :

Si on a un total de 8, on peut espérer : (1/6)*(9+10+11+12+13) ~ 9.16666666…
Si on a un total de 9, on peut espérer : (1/6)*(10+11+12+13) ~ 7.666666… → diminution, on s'arrête.
Si on a un total de 10, on peut espérer : (1/6)*(11+12+13) ~ 6
etc.

A partir d'un total de 9, la variation de l'espérance devient négative
→ Il faut stopper les lancers dès lors que nous obtenons un total de 9.

Ce résultat est confirmé par la simulation des lancers de dés.

Nous allons maintenant calculer l'espérance avec ce seuil de 9.

Les probabilités d'obtenir un score dépendent du total obtenu. A chaque étape.
Aussi nous devons calculer ces probabilités de proche en proche selon le nombre de lancers.

Calcul des probabilités selon le nombre de lancers

En deux lancers de dés (proba p2)

Le résultat est forcément supérieur ou égal à 2.

p2(X=2) → p (X=1)*p (X=1)=**$1/6^2$**
p2 (X=3) →p(X=1)*p(X=2)+p1(X=2)*p(X=1)=$1/36^2$+$1/36^2$=**2/36**
p2 (X=4) →p(X=1)*p(X=3)+p1(X=2)*p(X=2) +p1(X=3)*p(X=1)= **3/36**
p2 (X=5) → **$4/6^2$**
p2 (X=6) → **$5/6^2$**
p2 (X=7) → **$6/6^2$**
p2 (X=8) → **$5/6^2$**
p2 (X=9) → **$4/6^2$**
p2 (X=10) → **$3/6^2$**
p2 (X=11) → **$2/6^2$**
p2 (X=12) → **$1/6^2$**
Le total fait bien 36/36=1 OK
6^2*p2=[0,0,1,2,3,4,5,6,5,4,3,2,1];

De la même façon, on trouvera numériquement les probabilités suivantes les unes après les autres.
Pour chaque **tableau p_i, diviser la valeur par 6^i** pour avoir la bonne probabilité
p1 donne la probabilité d'une valeur à partir de 0 en un lancer de dés ;
p2 donne la probabilité d'une valeur à partir de 0 en deux lancers de dés ; etc.

P3(X=2) → **$0/6^3$**
p3(X=3) →p2(X=2)*p1(X=1) = **$1/6^3$**
p3 (X=4) →p2(X=2)*p1(X=2)+p2(X=3)*p1(X=1) = **$3/6^3$**
p3 (X=5) → p2(X=4)*p1(X=1)+p2(X=3)*p1(X=2) +p2(X=2)*p1(X=3) = (3+2+1)/6^3 = **$6/6^3$**
p3 (X=6) → (4+3+2+1+)/6^3 = **$10/6^3$**
p3 (X=7) → (6+5+4+3+2+1)/ 6^3 **= $15/6^3$**
p3 (X=8) → (6+ 5+4+3+2+1)/ 6^3 = **$21/6^3$**
p3 (X=9) → (5+6+ 5+4+3+2)/ 6^3 = **$25/6^3$**
p3 (X=10) → p2(X=8)*p1(X=2)+ p2(X=7)*p1(X=3)+ p2(X=6)*p1(X=4)+p2(X=5)*p1(X=5) +p2(X=4)*p1(X=6) = (5+6+5+4+3)/6^3 = **$23/6^3$**

Attention on s'arrête dès que 9 est atteint, on ne doit donc pas le dépasser.
p3 (X=11) → (5+6+5+4)/ 6^3 = **20//6^3**
p3 (X=12) → p2(X=6)*p1(X=6)+p2(X=7)*p1(X=5) +p2(X=8)*p1(X=4) = (5+6+5)/ 6^3 = **$16/6^3$**
p3 (X=13) → p2(X=7)*p1(X=6)+p2(X=8)*p1(X=5) = (6+5)/ 6^3 = **$11/6^3$**
p3 (X=14) → (5)/ 6^3 =**$5/6^3$**
S'arrêtant à 9 en deux coups, on ne peut pas atteindre 15 en 3 coups.

Les tableaux se lisent ainsi : p1(X=2)=1/36
6* p1=[0,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] ;
6^2*p2=[0,0,1,2,3,4,5,6,5,4,3,2,1,0,0,0,0,0];
6^3*p3=[0,0,0,1,3,6,10,15,21,25,23,20,16,11,5,0,0] ;
6^4*p4=[0,0,0,0,1,4,10,20,35,56,55,52,46,36,21] ;
6^5*p5=[0,0,0,0,0,1,5,15,35,70,70,69,65,55,35] ;
6^6*p6=[0,0,0,0,0,0,1,6,21,56,56,56,55,50,35] ;
6^7*p7=[0,0,0,0,0,0,0,1,7,28,28,28,28,27,21] ;
6^{8*}p8=[0,0,0,0,0,0,0,0,1,8,8,8,8,8,7] ;
6^{9*}p9=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1];

On a au maximum 9 lancers lorsque le seuil est à 9 !

Comme la stratégie consiste à s'arrêter dès que l'on obtient 9, il est inutile de faire le calcul pour plus de 9 lancers qui donneront forcément un score plus grand que 9.

Calcul de l'espérance

Avec un seuil de 9

On va effectuer au maximum 9 jeux car le 10ème commence au minimum à un total de 10. Au-delà de 13 le gain étant de 0, on ne tient pas compte non plus des résultats plus grands que

Les scores seront compris entre 9 et 13. On ne va donc tenir compte que de ces résultats.

p(X=9) = p1 (X=9) +p2(X=9) +p3(X=9)+p4(X=9)+p5(X=9)+p6(X=9) +p7(X=9) +p8(X=9) +p9(X=9)

$= 0 + 4/6^2 + 25/6^3 + 56/6^4 + 70/6^5 + 56/6^6 + 28/6^7 + 8/6^8 + 1/6^9$

$= (1\,119\,744 + 1\,166\,400 + 435\,456 + 90\,720 + 12\,096 + 1008 + 48 + 1) / 10\,077\,696$

$= 2\,825\,413 / 10\,077\,696 \sim 0.2803689454414977$

En procédant de même avec les autres, nous avons :
p(X=10) ~ 0.2425603034661891
p(X=11) ~ 0.19845022116166236
p(X=12) ~ 0.1469884584730478
p(X=13) ~ 0.08694973533633082

$$E = \sum_{i=9}^{i\infty 13} (i\, P(X = i))$$

E=9*p(X=9)+10*p(X=10)+… +13*p(X=13)

On obtient ainsi l'espérance : 101 039 827/ 10 077 696

E ~ 10.026084037462532

Une simulation sur 20 000 cas avec la condition d'arrêt sur 9 donne effectivement une moyenne de l'espérance comprise entre **10.02 et 10.03**

Animation :
http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/G196.swf

Q2

Posons comme variable ***k > 20***, le stop à ne pas dépasser.

Cherchons le seuil

Nous allons voir que c'est

-k-4 pour k=20 ET

-toujours k-5 pour k ≥ 21.

Quand on atteint le total ***t***, à une étape donnée, le nouveau lancer va donner une certaine variation de l'espérance.

Jusqu'à t=k-6, on augmente l'espérance :

$\sum_{i=1}^{i=k-t} \left(\frac{1}{6}\right) * \mathrm{i}$ = 1/6 *[(1+2+3+…+(k – t)

t=0 ➔ (1/6) [(k-t)*(k-t+1)/2]

t=1 ➔ (1/6) [(k-t-1)*(k-t)/2]

.

t= k-6 ➔ (1/6) [6*7/2] = 21/6

Ensuite on l'augmente ou diminue le total acquis selon le lancer et la variation de l'espérance est :

$\sum_{i=1}^{i=k-t} \left(\frac{1}{6}\right) * \mathrm{i}$ - $\sum_{i=k+1-t}^{i=6} \left(\frac{1}{6}\right) * \mathrm{t}$ = 1/6 *[1 + 2 + +…+(k-t) - t * (t-k+6)]

t=k-5 ➔ (1/6) [5*6/2 - (k-5)*1] = (20 – k)/6

t= k-4 ➔ (1/6) [4*5/2 - (k-4)*2] = (18 - 2*k)/6

t= k-3 ➔ (1/6) [3*4/2 - (k-3)*3] = (15 - 3*k)/6

t= k-2 ➔ (1/6) [2*3/2 - (k-2)*4] = (11 - 4*k)/6

t= k-1 ➔ (1/6) [1*2/2 - (k-1)*5] = (6 - 5*k)/6

Autre façon de voir :

Si on a un total de k-6, on peut espérer : (1/6)* (k-5 + k-4 + k-3 + k-2 + k-1 + k) = k - 2.5

Si on a un total de k-5, → (1/6)* (k-4 + k-3 + k-2 + k-1 + k) = 5k/6 – 10/6… = k - k/6 - 1.666…

Si on a un total de k-4, → (1/6)* (k-3 + k-2 + k-1 + k) = 4k/6 – 6/6… = 2k/3 -1…

Si on a un total de k-3, → (1/6)* (k-2 + k-1 + k) = k/2 – ½

On voit que pour éviter les variations négatives, il faut choisir :

pour k=20 → un seuil de k-4, soit 16

pour k=21 → un seuil de k-5, soit 16

pour k=22 → un seuil de k-5, soit 17

Ensuite, on voit que nous devons toujours choisir k-5 pour k ≥ 21

pour k=23 → un seuil de k-5, soit 18

pour k=24 → un seuil de k-5, soit 19

etc.

Ces résultats sont confirmés par la simulation des lancers de dés.

Calcul de l'espérance

Posons le seuil s, s=k-5, pour un maximum à ne pas dépasser : k

Calcul général de p3

P3(X=2) → **0/6^3**
p3(X=3) →p2(X=2)*p1(X=1) = **1/6^3**

p3 (X=4) → $\sum_{i=2}^{i=3} \mathrm{P2}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=4-\mathrm{i}))=$ (1+2)/ 6^3 **= 3/6^3**

p3 (X=5) → $\sum_{i=2}^{i=4} \mathrm{P2}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=5-\mathrm{i}))=$ (1+2+3)/6^3 = **6/6^3**

p3 (X=6) → $\sum_{i=2}^{i=5} \mathrm{P2}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=6-\mathrm{i}))=$ (1+2+3+4)/6^3 = **10/6^3**

p3 (X=7) → $\sum_{i=2}^{i=6} \mathrm{P2}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=7-\mathrm{i}))=$ (1+2+3+4+5) / 6^3 **= 15/6^3**

p3 (X=8) → $\sum_{i=2}^{i=7} \mathrm{P2}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=8-\mathrm{i}))=$ (1+2+3+4+5+6) / 6^3 **= 21/6^3**

p3 (X=9) → $\sum_{i=3}^{i=8} \mathrm{P2}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=9-\mathrm{i}))=$ (2+3+4+5+6+5) / 6^3 **= 25/6^3**

p3 (X=10) → $\sum_{i=4}^{i=9} \mathrm{P2}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=10-\mathrm{i}))=$ (3+4+5+6+5+4)/ 6^3 **= 27/6^3**

p3 (X=11) → $\sum_{i=5}^{i=10} \mathrm{P2}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=11-\mathrm{i}))=$ (4+5+6+5+4+3)/ 6^3 **= 27/6^3**

p3 (X=12) → $\sum_{i=6}^{i=11} \mathrm{P2}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=12-\mathrm{i}))=$ (5+6+5+4+3+2)/ 6^3 **= 25/6^3**

p3 (X=13) → $\sum_{i=7}^{i=12} \mathrm{P2}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=13-\mathrm{i}))=$ (6+5+4+3+2+1)/ 6^3 **= 21/6^3**

p3 (X=14) → $\sum_{i=8}^{i=12} \mathrm{P2}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=14-\mathrm{i}))=$ (5+4+3+2+1)/ 6^3 **= 15/6^3**

p3 (X=15) → $\sum_{i=9}^{i=12} \mathrm{P2}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=15-\mathrm{i}))=$ (4+3+2+1)/ 6^3 **= 10/6^3**

p3 (X=16) → $\sum_{i=10}^{i=12} \mathrm{P2}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=16-\mathrm{i}))=$ (3+2+1)/ 6^3 **= 6/6^3**

p3 (X=17) → $\sum_{i=11}^{i=12} \mathrm{P2}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=17-\mathrm{i}))=$ (2+1)/ 6^3 **= 3/6^3**

p3 (X=18) → $\sum_{i=12}^{i=12} \mathrm{P2}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=18-\mathrm{i}))=$ (1)/ 6^3 **= 1/6^3**

.

.

Au-delà de x=18, probabilité nulle.

Si x ≤ 18 → p3 (X=n) → $\sum_{i=Min(12,\ n-6,s)}^{i=12} \mathbf{P2}(\mathbf{X}=\mathbf{i})\ (\mathbf{P1}(\mathbf{X}=\mathbf{n}-\mathbf{i}))$

SINON **probabilité nulle.**

6^3*p3=[0,0,0,1,3,6,10,15,21,25,27,27,25,21,15,10,6,3,1,0,0,0]

Calcul général de p4

P4(X=2) → **$0/6^3$** ; p4(X=3) →p3(X=2)*p1(X=2) = **$0/6^3$**

p4 (X=4) → $\sum_{i=3}^{i=3} \mathrm{P3}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=4-\mathrm{i})) =$ **$1/6^4$**

p4 (X=5) → $\sum_{i=3}^{i=4} \mathrm{P3}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=5-\mathrm{i})) =$ $(1+3)/6^3 =$ **$4/6^4$**

p4 (X=6) → $\sum_{i=3}^{i=5} \mathrm{P3}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=6-\mathrm{i})) =$ $(1+3+6)/6^3 =$ **$10/6^4$**

p4 (X=7) → $\sum_{i=3}^{i=6} \mathrm{P3}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=7-\mathrm{i})) =$ $(1+3+6+10)/6^3 =$ **$20/6^4$**

p4 (X=8) → $\sum_{i=3}^{i=7} \mathrm{P3}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=8-\mathrm{i})) =$ $(1+3+6+10+15)/6^3 =$ **$35/6^4$**

p4 (X=9) → $\sum_{i=3}^{i=8} \mathrm{P3}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=9-\mathrm{i})) =$ $(1+3+6+10+15+21)/6^3 =$ **$56/6^4$**

p4 (X=10) → $\sum_{i=4}^{i=9} \mathrm{P3}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=10-\mathrm{i})) =$ $(3+6+10+15+21+25)/6^3 =$ **$80/6^4$**

p4 (X=11) → $\sum_{i=5}^{i=10} \mathrm{P3}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=11-\mathrm{i})) =$ $(6+10+15+21+25+27)/6^3 =$ **$114/6^4$**

p4 (X=12) → $\sum_{i=6}^{i=11} \mathrm{P3}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=12-\mathrm{i})) =$ $(10+15+21+25+27+27)/6^3 =$ **$125/6^4$**

p4 (X=13) → $\sum_{i=7}^{i=12} \mathrm{P3}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=13-\mathrm{i})) =$ $(15+21+25+27+27+25)/6^3 =$ **$140/6^4$**

p4 (X=14) → $\sum_{i=8}^{i=13} \mathrm{P3}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=14-\mathrm{i})) =$ $(21+25+27+27+25+21)/6^3 =$ **$146/6^4$**

p4 (X=15) → $\sum_{i=9}^{i=14} \mathrm{P3}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=15-\mathrm{i})) =$ $(25+27+27+25+21+15)/6^3 =$ **$140/6^4$**

p4 (X=16) → $\sum_{i=10}^{i=15} \mathrm{P3}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=16-\mathrm{i})) =$ $(27+27+25+21+15+10)/6^3 =$ **$125/6^4$**

p4 (X=17) → $\sum_{i=11}^{i=16} \mathrm{P3}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=17-\mathrm{i})) =$ $(27+25+21+15+10+6)/6^3 =$ **$104/6^4$**

p4 (X=18) → $\sum_{i=12}^{i=Min(17,k-5)} \mathrm{P3}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=18-\mathrm{i})) =$ $(1+3+6+10)/6^3 =$ **$20/6^4$**

p4 (X=19) → $\sum_{i=13}^{i=Min(16,k-5)} \mathrm{P3}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=18-\mathrm{i})) =$ $(1+3+6+10)/6^3 =$ **$20/6^4$**

.

p4 (X=k-5) → $\sum_{i=k-11}^{i=k-6} \mathrm{P3}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=\mathrm{k}-5-\mathrm{i}))$ **si k-5 ≤ 24 SINON 0**

p4 (X=k-4) → $\sum_{i=k-10}^{i=k-5} \mathrm{P3}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=\mathrm{k}-4-\mathrm{i}))$ **si k-4 ≤ 24 SINON 0**

On s’arrête à k-5

p4 (X=k-3) → $\sum_{i=k-9}^{i=k-5} \mathrm{P3}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=\mathrm{k}-3-\mathrm{i}))$ **si k-3 ≤ 24 SINON 0**

.

p4 (X=k) → $\sum_{i=k-5}^{i=k-5} \mathrm{P3}(\mathrm{X}=\mathrm{i})\ (\mathrm{P1}(\mathrm{X}=\mathrm{k}-\mathrm{i}))$ **si k-3 ≤ 24 SINON 0**

.

Au-delà de x=24, probabilité nulle pour p4.

On va effectuer au maximum s=k-5 jeux car le $(s+1)^{ème}$ commence au minimum à un total de *s+1*.
Au-delà de ***k*** le gain étant de 0, on ne tient pas compte non plus des résultats plus grands que k.

Les scores seront compris entre *s* et *k*. On ne va donc tenir compte que de ces résultats.

Calcul pour k=21 avec un seuil de 16 :

$6 *$ **p1**=[0,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] ;
$6^2 *$**p2**=[0,0,1,2,3,4,5,6,5,4,3,2,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,];
$6^3 *$**p3**=[0,0,0,1,3,6,10,15,21,25,27,27,25,21,15,10,6,3,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,] ;
$6^4 *$**p4** =[0,0,0,0,1,4,10,20,35,56,80,104,125,140,146,140,125,98,71,46,25,10,0,0,0,0,0,0,0,0];
$6^5 *$**p5**=[0,0,0,0,0,1,5,15,35,70,126,205,305,420,540,651,735,655,551,426,286,140,0,0,0];
$6^6 *$**p6**=[0,0,0,0,0,0,1,6,21,56,126,252,456,756,1161,1666,2247,2121,1916,1611,1191,651];
$6^7 *$**p7**=[00,0,0,0,0,0,0,1,7,28,84,210,462,917,1667,2807,4417,4291,4039,3583,2827,1666];
$6^8 *$ **p8**=[0,0,0,0,0,0,0,0,1,8,36,120,330,792,1708,3368,6147,6063,5853,5391,4474,2807];
$6^9 *$**p9**=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,9,45,165,495,1287,2994,6354,6318,6198,5868,5076,3368];
$6^{10} *$ **p10**=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,10,55,220,715,2002,4995,4986,4941,4776,4281,2994];
$6^{11} *$ **p11**=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,11,66,286,1001,3003,3002,2992,2937,2717,2002];
$6^{12} *$**p12**=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,12,78,364,1365,1365,1364,1353,1287,1001,0,0,0,0,0,0,0];
$6^{13} *$**p13**=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,13,91,455,455,455,454,442,364,0,0,0,0,0,0,0];
$6^{14} *$ **p14**=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,14,105,105,105,105,104,91,0,0,0,0,0,0,0,];
$6^{15} *$ **p15**=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,15,15,15,15,15,14,0,0,0,0,0,0,0,0];
$6^{16} *$**p16**=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0];

Probabilité d'obtenir la valeur n
p(X=n) = p1 (X=n) +p2(X=n) +p3(X=n)+p4(X=n)+p5(X=n)+p6(X=n) +… +ps(X=n)

Le calcul sur programme pour un maximum de 21 mène à la valeur : 17.66142808052653
qui correspond exactement au 100ème près à la valeur donnée par la simulation.

Le calcul par programme donne pour 22 : 18.666178085246692;
pour 23 : 19.669634821813673
pour 24 : 20.669188359834056
Pour 25 : 21.66568319645604
Pour 26 : 22.66535697698711
Pour 27 : 23.666244920144017
Pour 28 : 24.66704772674693
Pour 29 : 25.66719266699697
Pour 30 : 26.666785641194185
Pour 31 : 27.666385188087542
.
Pour 50 : 46.6666672949462

etc.

On tend vers (k-4)+2/3 = k - 10/3.
Pour un maximum de k, avec un seuil de k-5, l'espérance est de k - 10/3.

```
//////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
//Calcul Tableau des probabilities pour un certain nombre de lancers
function calculP(n) {
	this['p'+n]=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0];
	var i,k;
	for (i=0; i<=maxi; i++) {
		this['p'+n][i]=0;
		for (k=1; (k<=6)&&(k<i); k++) {
			//condition liée au seuil
			if ((i-k)<seuil) {
				var n1=n-1;
				this['p'+n][i]=this['p'+n][i]+this['p'+n1][i-k];
			}
		}
	}}

//////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
//////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
var maxi, seuil
//Les deux premiers tableaux pour initier le calcul de probabilité à 1  lancer, puis 2 lancers
this['p'+1]=[0,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0];
this['p'+2]=[0,0,1,2,3,4,5,6,5,4,3,2,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0];
//////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
function proba(n) {
	var p=0;
	for (var i=1; i<=seuil; i++) {

		p=p+this['p'+i][n]/Math.pow(6,i);
	}
}

//Calcul effectif de l'espérance
////////////////////////////////////////
function esperance() {
	for(var n=3;n<=maxi;n++){
		calculP(n)}
	var esp=0;
	for (var i=seuil; i<=maxi; i++) {
		esp=esp+proba(i)*i;
	}
}
////////////////////////////////////////////////////////////
//LANCEMENT
////////////////////////////////////////////////////////////
7maxi =22 ; seuil =maxi-5 ;
esperance();
```