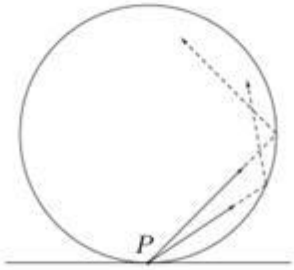
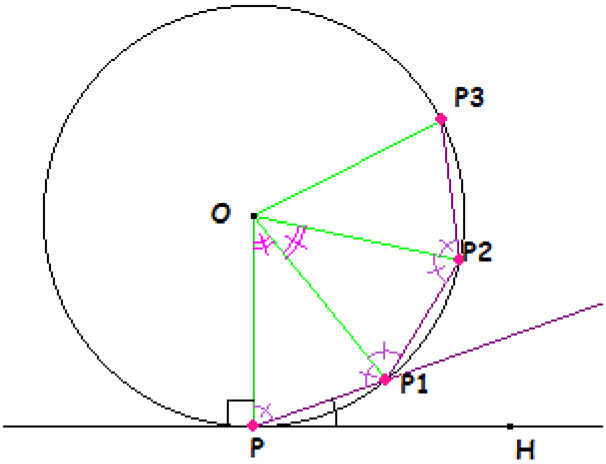
I166. A un degré près ***



On considère deux rayons laser qui partent d'un point P situé sur le bord intérieur d'une pièce circulaire. Ils forment respectivement deux angles de k degrés et k+ 1 degrés (k entier positif < 90°) avec la tangente en P au mur de la pièce.
Dans un plan horizontal, ils se réfléchissent le long de ce mur en laissant une marque rouge à chaque point de contact et reviennent au point P au bout d'un nombre fini de réflexions.

Q_1 Déterminer la valeur de k de sorte que le nombre de marques rouges (y compris celle en P) est le plus petit possible.
Q_2 On dénombre 45 marques rouges. Déterminer la ou les valeurs possibles de k.

PROPOSITION Th Eveilleau



Soit k = $\widehat{HPP1}$

Les réflexions étant symétriques sur le cercle, il s'ensuit que les triangles (POP_1), (P_1OP_2) etc. sont isocèles en O.

Les angles à la base de chacun de ces triangles valent tous **90° - k**.
Par conséquent l'angle au sommet en O de chacun de ces triangles vaut **2k**.

La suite des angles pour le rayon laser initié avec l'angle k, est :
2k, 4k, 3k ... m*2k etc.

La suite des angles pour le rayon laser initié avec l'angle (k+1), est :
2(k+1), 4(k+1), 3(k+1) ... m*2(k+1) etc.

Je mesure les angles en partant de la demi-droite (OP).

Q_1

Le rayon laser d'angle k et d'angle (k+1), marqueront la même tache, lorsqu'ils formeront en O le même angle .modulo 360°

Cet angle sera le plus petit commun multiple des deux angles 2k et 2(k+1).

k et k+1 sont premiers entre eux et leur ppcm est donc k*(k+1).

Celui de 2k et (2(k+1) est donc 2*k*(k+1).

Par exemple pour k=8 ; k+1=9 ; le ppcm est 144.
Un fois cet angle atteint, le cycle sera bouclé quand on retombera sur un angle nul modulo 360°

Donc quand on obtiendra le ppcm de 2k(k+1) et 360, donc de k(k+1) et 360.

Le problème revient à chercher le ppcm de **2k(k+1) et 360.**

<u>Exemple de traitement</u> avec k = 8 et k+1 = 9

Les deux rayons se rencontrent à **144°**

Celui de k=8, aura marqué 10 marques rouges les angles : 0, 16, 32, 48, 64, 80, 96, 112, 128, 144
Celui de k+1=9, aura marqué 9 marques rouges les angles : ~~0,~~ 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, ~~144~~
7 seulement sont différentes des précédentes.
Nous avons ainsi 10+7 =**17 marques** rouges. différentes.
On doit recommencer jusqu'à atteindre **720** qui le ppcm de 144 et 360.

Puis **16 marques** rouges :
Pour k=8 : 160, 176, 192, 208, 224, 240, 256, 272, 288
Pour k=9: 162, 180, 198, 216, 234, 252, 270, ~~288~~

Ensuite :
Pour k=8 : 304, 320, 336, 352, 8, 24, 40, 56, ~~72~~
Pour k=9: 306, 324, 342, ~~360~~
Nous obtenons ainsi **11** nouvelles marques.

Puis :
Pour k=8 : 88, 104, 120, 136,152, 168, 184, 200, ~~216~~
Pour k=9: la boucle est finie.pour k=9.
Nous obtenons ainsi **8** nouvelles marques.

Et enfin :
Pour k=8 : 232, 248, 264, 280, 296, 312, 328, 344
Nous obtenons ainsi **8** nouvelles marques.
Nous obtenons ainsi 17+16+11+8+8 = **60** marques rouges.

Un petit programme de calcul donne les résultats suivants :

k=1 ➔ 180 marques	k=1 9 ➔ 180 marques	k=37 ➔ 180 marques	k=55 ➔ 72 marques	k=73 ➔ 180 marques
k=2 ➔ 120 marques	k=20 ➔ 66 marques	k=38 ➔ 120 marques	k=56 ➔ 90 marques	k=74 ➔ 96 marques
k=3 ➔ 90 marques	k=21 ➔ 120 marques	k=39 ➔ 66 marques	k=57 ➔ 120 marques	**k=75 ➔ 54 marques**
k=4 ➔ 72 marques	k=22 ➔ 180 marques	k=40 ➔ 180 marques	k=58 ➔ 180 marques	k=76 ➔ 180 marques
k=5 ➔ 60 marques	k=23 ➔ 180 marques	k=41 ➔ 180 marques	k=59 ➔ 180 marques	k=77 ➔ 180 marques
k=6 ➔ 180 marques	**k=24 ➔ 48 marques**	k=42 ➔ 180 marques	k=60 ➔ 180 marques	k=78 ➔ 180 marques
k=7 ➔ 180 marques	k=25 ➔ 108 marques	k=43 ➔ 180 marques	k=61 ➔ 180 marques	k=79 ➔ 180 marques
k=8 ➔ 60 marques	k=26 ➔ 100 marques	**k=44 ➔ 48 marques**	k=62 ➔ 100 marques	k=80 ➔ 28 marques
k=9 ➔ 36 marques	k=27 ➔ 60 marques	k=45 ➔ 92 marques	k=63 ➔ 60 marques	k=81 ➔ 100 marques
k=10 ➔ 180 marques	k=28 ➔ 180 marques	k=46 ➔ 180 marques	k=64 ➔ 72 marques	k=82 ➔ 180 marques
k=11 ➔ 180 marques	k=29 ➔ 180 marques	k=47 ➔ 180 marques	k=65 ➔ 60 marques	k=83 ➔ 180 marques
k=12 ➔ 180 marques	k=30 ➔ 180 marques	k=48 ➔ 180 marques	k=66 ➔ 180 marques	**k=84 ➔ 48 marques**
k=13 ➔ 180 marques	k=31 ➔ 180 marques	k=49 ➔ 180 marques	k=67 ➔ 180 marques	k=85 ➔ 108 marques
k=14 ➔ 96 marques	k=32 ➔ 90 marques	k=50 ➔ 72 marques	k=68 ➔ 90 marques	k=86 ➔ 120 marques
k=15 ➔ 54 marques	k=33 ➔ 120 marques	k=51 ➔ 90 marques	k=69 ➔ 72 marques	k=87 ➔ 90 marques
k=16 ➔ 180 marques	k=34 ➔ 108 marques	k=52 ➔ 180 marques	k=70 ➔ 180 marques	k=88 ➔ 180 marques
k=17 ➔ 180 marques	**k=35 ➔ 40 marques**	k=53 ➔ 180 marques	k=71 ➔ 180 marques	k=89 ➔ 180 marques
k=18 ➔ 180 marques	k=36 ➔ 180 marques	**k=54 ➔ 44 marques**	k=72 ➔ 180 marques	

Le nombre de marques rouges le plus petit est obtenu avec **k=80** ; k+1=81 qui donnent **28 marques rouges**.

Ce sont celles qui correspondent aux angles au centre de :
0, 18, 36, 40 , 54, 72, 80, 90, 108, 120, 126, 144, 160, 162, 180, 198, 200, 216, 234, 240, 252, 270, 280, 288, 306, 320, 324, 342

Q2

Pas de réponse pour 45 marques rouges.

}

⇨

Programme de recherche

```
//Pour un seul angle : donne la liste des angles au centre  modulo 360
/////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
function tour (ang) {

		//angle au centre
		var  aI=2*ang;
		//angle actuel
		var aR;

		//stockage des angles
		var tabR:Array=new Array();

		tabR=[0];
		var j=1;
		aR=j * aI;

		//On boucle jusqu'à ce qu'on retombe sur un angle déjà vu modulo 360
		while (tabR.indexOf(aR)==-1) {

				//pas de doublons
				if   (! present(aR, tabR)) {
						tabR.push(aR);
				}

				j=j+1;
				aR=(j * aI) % 360;

		}

		//trace('longueur', tabR.length);
		return (tabR);
}



//Les deux angles successifs
///////////////////////////////////////////////////////////////////////
function tours(n1,n2) {

		//Les deux angles successifs
		var t1:Array=tour(n1);
		var t2:Array=tour(n2);

		for (var i in t2) {
				var v=t2[i];
				if (t1.indexOf(v)==-1) {
						t1.push(v);
				}
		}

		T1=.sort(Array.NUMERIC);

		return (t1.length);
}
```

```
//La recherche se fait en bouclant sur k
////////////////////////////////////////////////////////////
```