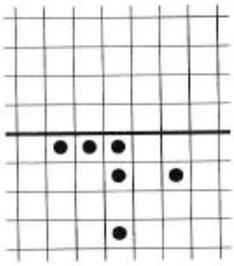
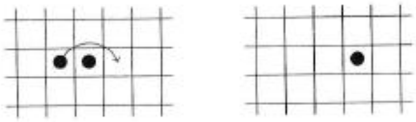
100 Le solitaire

On dispose d'un quadrillage infini sur lequel sont placées des billes dans le demi-plan inférieur délimité par une ligne.



Les billes peuvent se déplacer comme au jeu du solitaire, c'est-à-dire qu'une bille peut "sauter" par-dessus une autre (horizontalement ou verticalement mais pas en diagonale), qui est alors retirée.

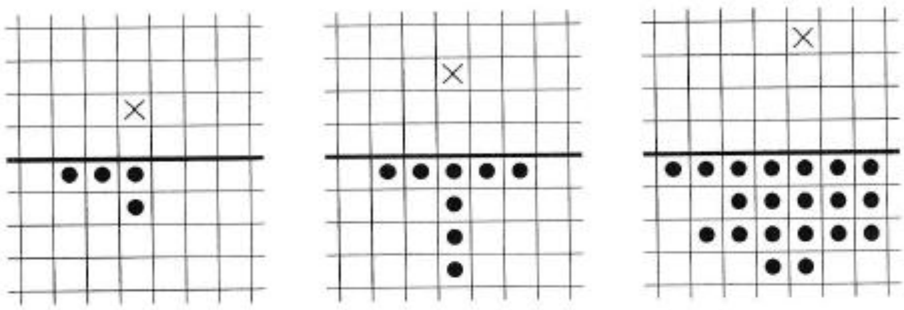


Le but est d'envoyer une bille le plus haut possible au-delà de la ligne. Quelle hauteur maximale peut-on atteindre ?

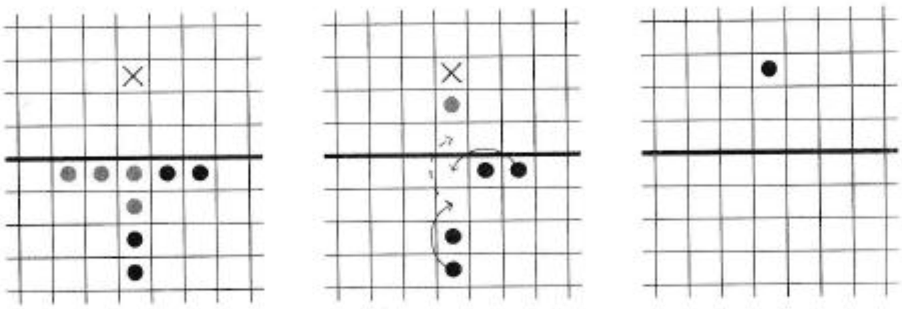
Par exemple, sur la grille ci-dessus, il ne sera pas possible d'aller à plus de deux cases au-delà de la ligne. Cependant, avec une bonne configuration des billes sous la ligne, on peut faire mieux.

100 On va commencer par montrer que l'on peut atteindre la quatrième ligne, puis, ce qui est bien plus délicat, que l'on ne peut pas atteindre la cinquième ligne.

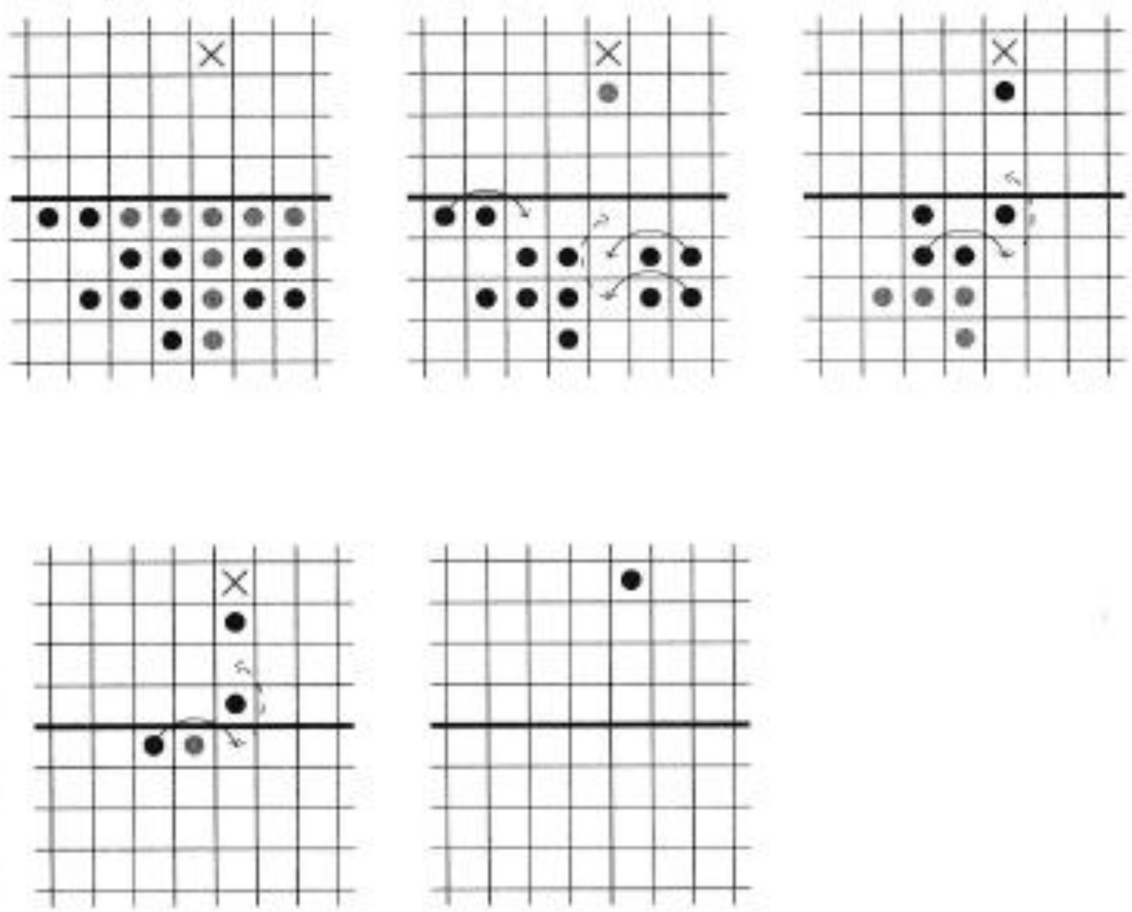
Les configurations ci-dessous permettent d'atteindre respectivement la deuxième, la troisième et la quatrième ligne.



Pour atteindre la troisième ligne, on complète la configuration servant à atteindre la deuxième ligne. Les étapes sont explicitées ci-dessous :



Atteindre la quatrième ligne s'avère un peu plus délicat. On place la configuration nécessaire pour atteindre la troisième ligne, ce qui donne déjà après un certain nombre d'étapes un pion en troisième ligne. Les autres pions vont permettre d'en placer un en deuxième ligne, ce qui permet d'obtenir finalement un pion en quatrième ligne :



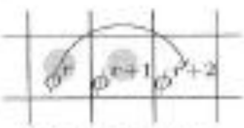
Il reste à montrer que l'on ne peut pas atteindre la cinquième ligne. La démonstration suivante est due à John Horton Conway, célèbre mathématicien britannique.

Commençons par assigner la valeur 1 à une case de la cinquième ligne. On assigne aux autres cases la valeur ϕ^r, où r est le plus petit nombre de pas (horizontaux ou verticaux) pour atteindre la case 1, et ϕ est le nombre d'or moins 1 : $\phi \simeq 0.618$, plus précisément ϕ est l'unique réel positif vérifiant $\phi^2 + \phi = 1$. Graphiquement, cela donne :

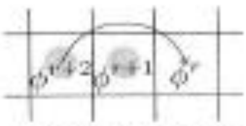
ϕ^3	ϕ^2	ϕ^1	1	ϕ^1	ϕ^2	ϕ^3
ϕ^4	ϕ^3	ϕ^2	ϕ^1	ϕ^2	ϕ^3	ϕ^4
ϕ^5	ϕ^4	ϕ^3	ϕ^2	ϕ^3	ϕ^4	ϕ^5
ϕ^6	ϕ^5	ϕ^4	ϕ^3	ϕ^4	ϕ^5	ϕ^6
ϕ^7	ϕ^6	ϕ^5	ϕ^4	ϕ^5	ϕ^6	ϕ^7
ϕ^8	ϕ^7	ϕ^6	ϕ^5	ϕ^6	ϕ^7	ϕ^8
ϕ^9	ϕ^8	ϕ^7	ϕ^6	ϕ^7	ϕ^8	ϕ^9

Supposons par l'absurde qu'il soit possible d'atteindre la case 1. On dispose alors d'une configuration comportant un nombre fini de pions sous la ligne, qui après un certain nombre d'étapes, amène un pion sur la case 1. On appelle énergie d'un pion la valeur de la case où il se trouve, et énergie totale des pions la somme des énergies des pions.

Montrons que l'énergie totale des pions ne peut que décroître lors d'un déplacement. Il y a trois types de déplacements :



Premier type



Deuxième type

Troisième type

— Pour le premier type de déplacement, la variation d'énergie est $\phi^{r+2} - \left(\phi^{r+1} + \phi^r\right)$. Comme $0 < \phi < 1$, $\phi^{r+2} < \phi^{r+1} < \phi^{r+1} + \phi^r$. L'énergie décroît strictement.

— Dans le deuxième type, la variation d'énergie est $\phi^r - \left(\phi^{r+1} + \phi^{r+2}\right)$. Comme $\phi^2 + \phi = 1$, $\phi^{r+2} + \phi^{r+1} = \phi^r$, et l'énergie ne varie pas.

— Enfin, pour le troisième type, la variation est $\phi^{r+1} - \left(\phi^r + \phi^{r+1}\right) = -\phi^r < 0$ donc l'énergie décroît strictement.

Finalement, quoi que l'on fasse, l'énergie décroît toujours, au sens large. Calculons maintenant l'énergie E contenue par tout le demi-plan inférieur.

L'énergie de la première ligne est

$$\phi^5 + 2\phi^6 + 2\phi^7 + 2\phi^8 + ... = \phi^4 \left(\phi + 2\left(\phi^2 + \phi^3 + \phi^4 ...\right)\right)$$

Or,

$$\phi^2 + \phi^3 + \phi^4 + ... = \frac{\phi^2}{1-\phi} = 1$$

ainsi l'énergie de la première ligne est

$$\phi^4 (\phi + 2)$$

cela permet d'en déduire l'énergie totale :

$$E = \phi^4 (\phi + 2) \left(1 + \phi + \phi^2 + ...\right)$$

Or,

$$1 + \phi + \phi^2 + \phi^3 + ... = \frac{1}{1-\phi} = \frac{1}{\phi^2}$$

donc

$$E = \phi^4 (\phi + 2) \times \frac{1}{\phi^2} = \phi^2 (\phi + 2) = (1 - \phi)(\phi + 2) = 2 - \phi - \phi^2 = 1$$

L'énergie totale des pions est strictement inférieure à E car on a supposé qu'il n'y avait qu'un nombre fini de pions. Or, une fois qu'un pion est à la case 1, l'énergie du système est supérieure ou égale à 1. C'est absurde car l'énergie ne peut que décroître. Conclusion : il est impossible d'atteindre la cinquième ligne.