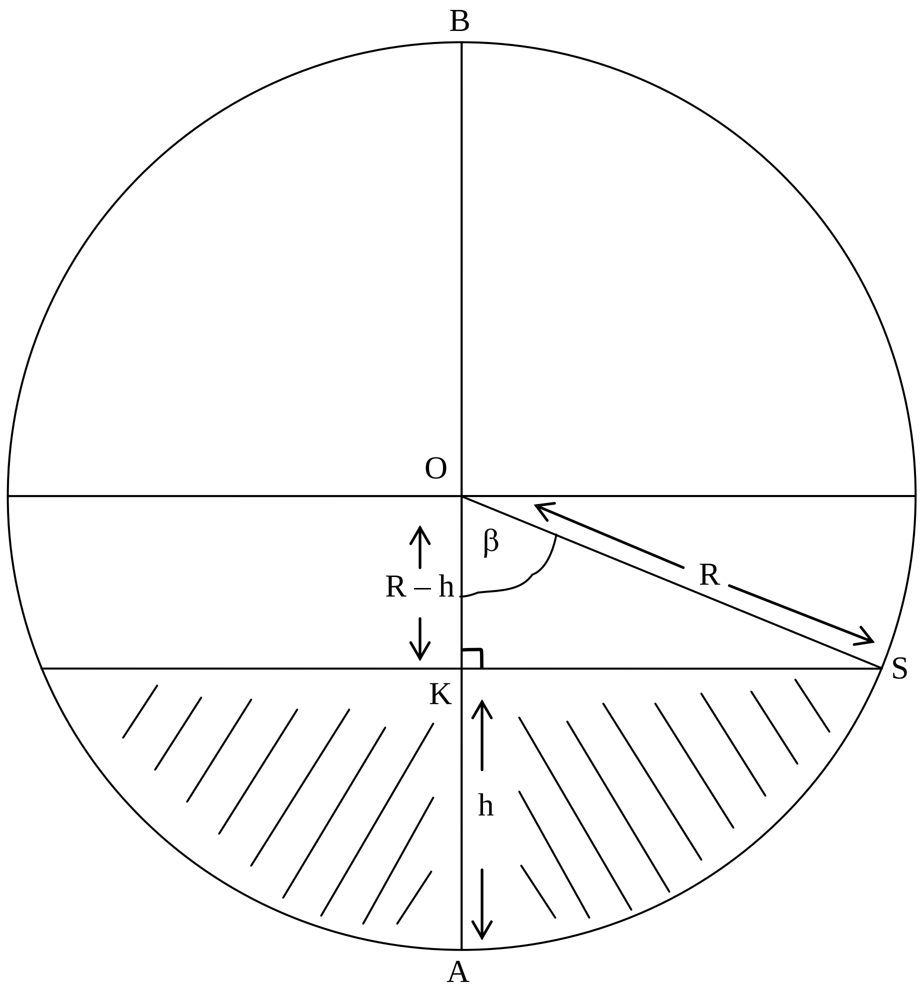
Démos et calculs pour la cuve cylindrique couchée ...



Soit R le rayon de la cuve cylindrique, L sa longueur et h la hauteur du liquide (hachuré) dans la cuve.

On cherche le volume de liquide contenu dans cette cuve pour la hauteur h mesurée ; on veut l'expression de ce volume en fonction de R et L ; pour l'avoir il suffit de multiplier l'aire hachurée par L !!!

Dans le cas où $0 \leqslant h \leqslant R$, on a le triangle SOK qui est rectangle en K et $\cos \beta = \dfrac{R-h}{R}$.

L'angle β est l'angle ayant pour cosinus $\dfrac{R-h}{R}$, donc $\beta = \text{Arc}\cos \dfrac{R-h}{R}$.

Une calculatrice peut le donner dès que l'on a les valeurs de R et h.

$\mathcal{A}ire(\mathbf{SOK}) = \dfrac{OK \times KS}{2} = \dfrac{(R \times \cos \beta) \times (R \times \sin \beta)}{2} = \dfrac{R^2 \times \cos \beta \times \sin \beta}{2} = \dfrac{\mathbf{R^2 \sin 2\beta}}{\mathbf{4}}$

(car dans SOK rectangle en K on a $OK = R \times \cos \beta$ *et* $KS = R \times \sin \beta$ *et aussi* $\cos \beta \times \sin \beta = \dfrac{\sin 2\beta}{2}$*)*

Pour un angle (exprimé en radians) de 2π l'aire du disque vaut $\pi \times R^2$ donc pour un angle β l'aire du secteur SOA correspondant vaut $\mathcal{A}ire(\mathbf{SOA}) = \beta \times \dfrac{\pi \times R^2}{2\pi} = \dfrac{\mathbf{\beta R^2}}{\mathbf{2}}$.

Donc $\mathcal{A}ire(\mathbf{SAK}) = \mathcal{A}ire(\mathbf{SOA}) - \mathcal{A}ire(\mathbf{SOK}) = \dfrac{\mathbf{\beta R^2}}{\mathbf{2}} - \dfrac{\mathbf{R^2 \sin 2\beta}}{\mathbf{4}} = \dfrac{\mathbf{R^2}}{\mathbf{2}} \left(\beta - \dfrac{\mathbf{\sin 2\beta}}{\mathbf{2}} \right)$

Ainsi l'aire de toute la partie hachurée de la figure est $2 \times \dfrac{R^2}{2} \left(\beta - \dfrac{\sin 2\beta}{2} \right) = R^2 \left(\beta - \dfrac{\sin 2\beta}{2} \right)$

Et alors le volume de liquide s'obtient en multipliant par la longueur L de la citerne :

$$\mathcal{V}\textbf{(liquide)} = \mathbf{R^2\,(\,\beta - \frac{\sin 2\beta}{2}\,) \times L}$$

Pour obtenir le résultat en litres, qui équivalent les dm^3, il faut exprimer toutes les longueurs, R et L de la formule en dm ; étant par défaut en m, il faut les multiplier chacune, par 10.

$$\mathcal{V}(\text{liquide}) = (10R)^2\,(\,\beta - \frac{\sin 2\beta}{2}\,) \times (10L)$$

$$\mathcal{V}(\text{liquide}) = 1\,000\ R^2\ L\,(\,\beta - \frac{\sin 2\beta}{2}\,)\ \text{avec}\ \beta = \text{Arc cos}\,\frac{R-h}{R}$$

D'où aussi la formule du volume (en litres) en fonction de R, h et L (exprimés m) :

$$\mathcal{V}(\text{liquide}) = 1\,000\ R^2\ L\,(\,\beta - \frac{\sin 2\beta}{2}\,)\ \textit{avec}\ \beta = \textit{Arc cos}\,\frac{R-h}{R}$$

$$\mathcal{V}\textbf{(liquide en litres)} = \mathbf{1\,000\ R^2\ L\ [\ \textbf{Arc cos}\,\frac{R-h}{R} - \frac{\sin\,[2\ \textbf{Arc cos}\,\frac{R-h}{R}]}{2}\ ]}$$

En rentrant dans cette formule, les valeurs de h, R et L en **mètres**, tu obtiens ton volume de liquide directement en **litres**, comme le préfèrent souvent les utilisateurs pour évaluer les quantités de liquide ...

Cette formule a été trouvée avec $0 \leqslant h \leqslant R$ et rien ne dit que si h dépasse R elle reste valable ....

Alors que faire si, comme ça peut très bien arriver dans la vie de tous les jours, on a $R \leqslant h \leqslant 2R$ .... ???

Il faut considérer la figure renversée dans l'autre sens : voir figure plus bas !

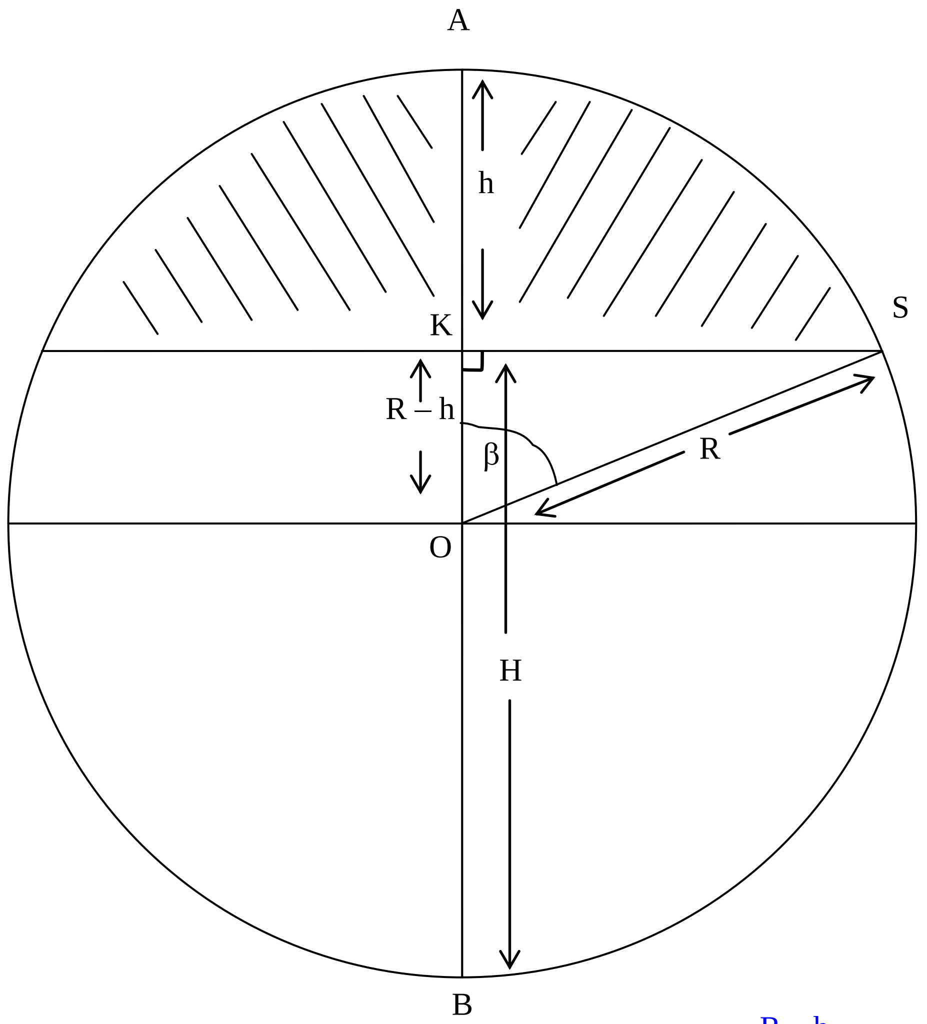
La hauteur de liquide mesurée est cette fois-ci notée H ($R \leqslant H \leqslant 2R$) c'est la distance entre les points B et K de la figure.

Le volume de liquide est blanc sur la figure et pour le trouver il suffit prendre le volume complet de la cuve qui est donné par : $\mathcal{V}$**(cuve en litres) = π 1 000 R^2 L (avec R et L exprimées en mètres) ...**

... et d'en retirer le volume hachuré calculé avec la formule trouvée plus haut puisque $0 \leqslant h \leqslant R$.

$$\mathcal{V}\textbf{(hachuré en litres)} = \mathbf{1\,000\ R^2\ L\ [\ \textbf{Arc cos}\,\frac{R-h}{R} - \frac{\sin\,[2\ \textbf{Arc cos}\,\frac{R-h}{R}]}{2}\ ]}$$

C'est cette différence $\mathcal{V}$(cuve en litres) – $\mathcal{V}$(hachuré en litres) qu'il va falloir « transformer » en utilisant les formules de trigonométrie classiques !!!



$$\mathfrak{V}(\text{liquide en litres}) = 1\,000\,\pi\,R^2\,L - 1\,000\,R^2\,L\left[\text{Arc cos}\,\frac{R-h}{R} - \frac{\sin\left[2\,\text{Arc cos}\,\frac{R-h}{R}\right]}{2}\right]$$

$$\mathfrak{V}(\text{liquide en litres}) = 1\,000\,R^2\,L\left[\pi - \text{Arc cos}\,\frac{R-h}{R} + \frac{\sin\left[2\,\text{Arc cos}\,\frac{R-h}{R}\right]}{2}\right]$$

Or, bien regarder la figure pour voir : R – h = H – R (H hauteur du liquide comprise entre R et 2R) donc :

$$\mathfrak{V}(\text{liquide en litres}) = 1\,000\,R^2\,L\left[\pi - \text{Arc cos}\,\frac{H-R}{R} + \frac{\sin\left[2\,\text{Arc cos}\,\frac{H-R}{R}\right]}{2}\right]$$

Or Arc cos $\alpha = \pi -$ Arc cos $(-\alpha)$ et pour nous : Arc cos (H – R) = π – Arc cos (R – H) donc :

$$\mathfrak{V}(\text{liquide en litres}) = 1\,000\,R^2\,L\left[\pi - \left(\pi - \text{Arc cos}\,\frac{R-H}{R}\right) + \frac{\sin\left[2\left(\pi - \text{Arc cos}\,\frac{R-H}{R}\right)\right]}{2}\right]$$

$$\mathfrak{V}(\text{liquide en litres}) = 1\,000\,R^2\,L\left[\text{Arc cos}\,\frac{R-H}{R} + \frac{\sin\left[2\left(\pi - \text{Arc cos}\,\frac{R-H}{R}\right)\right]}{2}\right]$$

$$\mathfrak{V}(\text{liquide en litres}) = 1\,000\,R^2\,L\left[\text{Arc cos}\,\frac{R-H}{R} + \frac{\sin\left[2\pi - 2\text{Arc cos}\,\frac{R-H}{R}\right]}{2}\right]$$

Or sin [2π – x] = sin [-x] et pour nous : sin [2π – 2Arc cos $\frac{R-H}{R}$] = sin [-2Arc cos $\frac{R-H}{R}$]

$$\mathfrak{V}\text{(liquide en litres)} = 1\,000\ R^2 L \left[\text{Arc cos}\,\frac{R-H}{R} + \frac{\sin\left[-2\ \text{Arc cos}\,\frac{R-H}{R}\right]}{2} \right]$$

Or sin [-2x] = -sin *[2x] donc pour nous : sin [-2Arc cos $\frac{R-H}{R}$] =* -sin *[2Arc cos $\frac{R-H}{R}$]*

$$\mathfrak{V}\text{(liquide en litres)} = 1\,000\ R^2 L \left[\text{Arc cos}\,\frac{R-H}{R} - \frac{\sin\left[2\ \text{Arc cos}\,\frac{R-H}{R}\right]}{2}\right]$$

On trouve ici la formule du volume pour une hauteur H de liquide avec R ⩽ H ⩽ 2R et c'est la même formule que pour h avec 0 ⩽ h ⩽ R !!!

Donc pour <u>toute hauteur h</u> de liquide telle que <u>0 ⩽ h ⩽ 2R</u>, avec R le rayon de la cuve, L la longueur de la cuve,

$$\mathfrak{V}\text{(liquide en litres)} = 1\,000\ R^2 L \left[\text{Arc cos}\,\frac{R-H}{R} - \frac{\sin\left[2\ \text{Arc cos}\,\frac{R-H}{R}\right]}{2}\right] \text{ (h, R et L exprimées en mètres)}$$

ou bien :

$$\mathfrak{V}\text{(liquide en m}^3\text{)} = R^2 L \left[\text{Arc cos}\,\frac{R-H}{R} - \frac{\sin\left[2\ \text{Arc cos}\,\frac{R-H}{R}\right]}{2}\right] \text{ (h, R et L exprimées en mètres)}$$